Nº D'ORDRE au C.N.R.S.
A O 10.966

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Michel LEDOUX

SIMULATION THERMIQUE D'ECOULEMENTS AVEC REACTION DE SURFACE:

ETUDE DE LA COUCHE LIMITE DE DIFFUSION EN REGIME LAMINAIRE ET TURBULENT

Soutenue le 12 Février 1975

MM.	P. VALENTIN	Professeur à l'Université de Rouen	Président
	J. VILLERMAUX	Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine Directeur du L.S.G.C.	Examinateurs
	G. LASSAU	Professeur, Directeur de l'I.U.T. de Bourges	
	P. HAYMANN	Professeur à l'Université de Rouen	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544711_0009

Nº D'ORDRE au C.N.R.S.
AO 10.966

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Michel LEDOUX

SIMULATION THERMIQUE D'ECOULEMENTS AVEC REACTION DE SURFACE : ETUDE DE LA COUCHE LIMITE DE DIFFUSION EN REGIME LAMINAIRE ET TURBULENT

Soutenue le 12 Février 1975

MM. P. VALENTIN	Professeur à l'Université de Rouen	Président
J. VILLERMAUX	Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine Directeur du L.S.G.C.	Examinateurs
G. LASSAU	Professeur, Directeur de l'I.U.T. de Bourges	
P. HAYMANN	Professeur à l'Université de Rouen	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE ROUEN

FACULTE DES SCIENCES
ET DES TECHNIQUES

ANNÉE SCOLAIRE 1974-1975

PERSONNEL ENSEIGNANT DE LA FACULTE DES SCIENCES

LE DOYEN ..... P. ROLLIN

Mle	COUILLAUD Edith	Professeur Honoraire
MM.	BACHELET Maurice	Professeur (Chimie)
	BOULLARD Bernard	Professeur (Biologie Végétale)
	BOURION Georges	Professeur (Mathématiques)
	COLOMBANI Antoine	Professeur (Physique)
	GRAF René	Professeur (Physique)
	HANSEL Georges	Professeur (Mathématiques)
	ROLLIN Paul	Professeur (Biologie Végétale)
	THELLIER Michel	Professeur (Biologie Végétale)
	VALENTIN Pierre	Professeur (Physique)
MM.	BOUIX Maurice	Professeur à titre personnel (Mathématiques)
	DUHAMEL Pierre	Professeur à titre personnel (Chimie)
	GRIBENSKI André	Professeur à titre personnel (Biologie Animale)
Mme	ROUSSEAU Madeleine	Professeur à titre personnel (Physique)
Mr	SELEGNY Eric	Professeur à titre personnel (Chimie)
Mme	WINOGRADZKI Judith	Professeur à titre personnel (Physique)
MM.	BOUAZIZ Roger	Professeur sans chaire (Chimie)
	CHALOPIN Henri	Professeur sans chaire (Biologie Animale
	GALLOT Jean	Professeur sans chaire (Physique)
	HAYMANN Pierre	Professeur sans chaire (Physique)
	HOMMERIL Pierre	Professeur sans chaire (Géologie)
	HUET Pierre	Professeur sans chaire (Physique)
	GOUAULT Jean	Professeur sans chaire (Physique)
Mme	SURIN Aline	Professeur sans chaire (Mathématiques)
MM.	CHARPENTIER Jean	Maître de Conférences (Biologie Animale) Psychophysiologie
	CONRAD Georges	Maître de Conférences (Géologie)
	DE BRUCQ Denis	Maître de Conférences à l'I.U.T. du Havre (Mathématiques)
	DERRIDJ Maklouf	Maître de Conférences (Mathématiques)
	DEVAUCHELLE Gérard	Maître de Conférences (Biologie Végétale)
	GRONSTEIN Claude	Maître de Conférences (Mathématiques)
	PEREZ Guy	Maître de Conférences (Chimie)

MM.	PETIT Jean Louis	Maître de Conférences (Mathématiques)
	RAOULT Jean-Pierre	Maître de Conférences (Mathématiques)
	UNANUE Jean-Pierre	Maître de Conférences (Chimie)
	VAILLANT René	Maître de Conférences (Biologie Animale)
Mr	COMBRET Jean-Claude	Chargé d'Enseignement (Chimie)

A ma femme,

A mes enfants,

A mes parents.

Monsieur VALENTIN m'a accueilli dans son laboratoire et m'a donné l'idée de ce travail.

Il en a suivi l'exécution avec un intérêt constant, et m'a toujours fait bénéficier de ses conseils et de ses encouragements.

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude au Directeur d'une équipe à laquelle je suis heureux d'appartenir.

Monsieur J. VILLERMAUX, Professeur, Directeur du L.S.G.C.

Monsieur G. LASSAU, Professeur, Directeur de l'I.U.T. de Bourges

Monsieur P. HAYMANN, Professeur à l'Université de Rouen

ont accepté de juger ce travail.

Je tiens ici à les en remercier vivement.

Le travail que rapporte ce mémoire a été réalisé au Laboratoire de Thermodynamique de l'Université de Rouen. Je tiens à remercier ici tous ceux qui m'y ont aidé.

Monsieur MOUARD, Ingénieur, a réalisé les dispositifs électroniques. J'ai eu l'occasion d'apprécier, à cette occasion, son soin et son ingéniosité, même dans l'exécution des tâches les plus rébarbatives. Qu'il trouve ici l'expression de mon amicale reconnaissance.

Monsieur GOUESBET, Chercheur et Philosophe, a étudié et construit l'anémomètre Doppler-Laser utilisé pour certaines mesures de vitesses. Nous avons effectué ces mesures ensemble, et je garde un excellent souvenir de cette collaboration qui m'a apporté beaucoup plus que des résultats expérimentaux.

Monsieur MAUCONDUIT a accepté d'effectuer la programmation sur ordinateur pour des calculs, à chaque fois que cela a été nécessaire. Je tiens à l'assurer ici de ma gratitude.

Je dois remercier mon Collègue M. TRINITE, qui, au cours de nos conversations, m'a fait bénéficier de sa grande compétence dans le domaine de la mesure.

Messieurs SIMON, LEBLOND et LEFRANCOIS ont réalisé le dispositif expérimental. Je tiens à souligner ici l'importance de leur travail et les en remercier profondément.

La dactylographie a été assurée par Madame BION. Elle a su s'acquiter de cette tâche dans des délais très courts, et pourtant y a mis un soin et une application qui lui font honneur. Qu'elle croie à ma profonde reconnaissance.

Messieurs MARTINEZ et HERNANDEZ ont réalisé le tirage avec goût et diligence. Qu'ils en soient ici remerciés.

Enfin que mes camarades du laboratoire, que je ne peux tous citer ici, soient remerciés pour avoir fait régner dans le laboratoire une ambiance de saine modestie dont je leur saurai toujours gré.

Sommaire

page

NOMENCLATURE GENERALE I

INTRODUCTION VI

Chapitre 1
LA SIMULATION THERMIQUE

Introduction 1

1.1. Le principe de la simulation thermique 3

1.2. Les équations 3

1.3. Importance du paramètre K 8

1.4. L'utilité d'une variable généralisée 9

Chapitre 2
LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL

2.1. La soufflerie hydraulique 12

2.2. Le modèle de simulation 16

2.3. Le dispositif de mesures 21

Chapitre 3

LES CORRECTIONS DUES AUX PROPRIETES DU FLUIDE
ET A LA SYMETRIE AXIALE

3.1. L'influence de la variation des propriétés physiques avec la température 29

3.2. L'influence de la courbure transversale 34

Chapitre 4

L'ETUDE EXPERIMENTALE EN REGIME LAMINAIRE

4.1. L'étude dynamique 43

4.2. Simulation de réactions d'ordre n 54

Chapitre 5

LE CALCUL DES CONCENTRATIONS PARIETALES
EN REGIME LAMINAIRE

5.1. Le problème 68

5.2. Les méthodes de résolution 70

5.3. Le calcul de concentrations pariétales 79

5.4. Résultats du calcul 86

5.5. Comparaison avec les profils expérimentaux 95

Chapitre 6

L'ETUDE EXPERIMENTALE EN REGIME TURBULENT

6.1. L'étude dynamique 101

6.2. Les simulations thermiques en turbulent 112

Chapitre 7

LE CALCUL DES CONCENTRATIONS PARIETALES
EN REGIME TURBULENT

7.1. Le choix d'un noyau. La mise en forme du calcul 123

7.2. Comparaison avec l'expérience 136

Chapitre 8

LES APPLICATIONS DE LA SIMULATION THERMIQUE

8.1. L'analogie thermique 141

8.2. Etude de sillages catalytiques 146

8.3. Etude par analogie thermique d'un réacteur annulaire 147

CONCLUSION 158

Annexe 1 : Calcul des pertes thermiques dans le modèle 160

Annexe 2 : Influence de la dimension des éléments en régime laminaire 165

Annexe 3 : Justification d'une correction due à une courbure transversale portant sur θ 169

Annexe 4 : Application de la méthode de Rosner à un échelon de catalyse .. 172

BIBLIOGRAPHIE 176

Nomenclature générale

CARACTERES LATINS

a : $\lambda/\rho C_p$ diffusivité thermique

a_i : chapitre 7 : coefficient

A,B,C : coefficients (chapitre 4)

C : concentration

c_p : chaleur massique

c_i : coefficients (chapitre 7)

D : coefficient de diffusion (cm/s^2)

$\frac{D}{Dt}$: opérateur dérivée hydrodynamique

E : coefficient (formule 5.43.) $E = \frac{12^{1/3}}{(0,311)^{1/3}} Da\ Sc^{2/3}$

f : fréquence du signal Doppler (Chapitre 4)

F : coefficient défini par (7.26b)
chapitre 8 : résultante des forces de volume

Gn_p : coefficient générateur de la variable z_p (5.20.)

h : coefficient de convection

H,H' : coefficients (7.23) et (7.26a)

i : interfrange (chapitre 4)

I_i, I_i' : intégrales définies par (7.25) et (7.31.)

j_i : incrément de concentration (5.51c).

J : densité de flux de masse ($g/cm^2.s$)

k : constante de cinétique chimique (cm/s, au premier ordre)

K : constante de cinétique thermique. Au chapitre 6 : constante de Karman.

ℓ : constante (6.8.)

L : annexe 1 : Longueur du 1er élément

m : C/C_e, concentration réduite

$M(x,x_0)$: fonction définie par (5.14.)

M_R, M_S : intégrales définies par (7.10.) et (7.11.)

n : ordre de réaction

N : nombre d'intervalles pour le calcul (Chapitre 5)

q : exposant (5.46.)

R : débit massique (g/s)

r : chapitre 2 : résistance de chauffage
chapitre 3, 5 : rayon du cylindre
chapitre 6 et 8 : variable radiale

R, R_0 : résistances des sondes de températures

R, R_1 : chapitre 8 : rayon des cylindres extérieur et intérieur du réacteur annulaire

R_i, R_e : Annexe 1 : rayons d'un bloc

S : surface chauffante d'un élément

$Sp(x^+), Sq(x^+)$: fonctions de Spalding, à température et à flux constant

t : temps. Chapitre 5 : variable définie par (5.35.)

T : température. Chapitre 4 : période du signal Doppler

u,v : composantes de la vitesse suivant x et y (cm/s)

U : vitesse (cm/s)

U,V : chapitres 2 et 8 : tensions d'alimentation d'un élément chauffant (Volts).

x,y : variables d'espace (longitudinale et orthogonale)

y,z : variables adimensionnelles d'espace en coordonnées cylindriques utilisées au chapitre 8 (8.15.).

z_p : variable adimensionnelle définie par (5.20.)

z : forme utilisée ici pour $z_{0,5}$

Z : annexe 1 : longueur adimensionnelle du 1er élément

CARACTERES GRECS

α : chapitre 2, coefficient de température

chapitre 5, coefficient défini par (5.40.)

α, β : chapitre 6, coefficients définis par (6.1.) et (6.2.)

$\beta(x,x_0)$: noyau de l'intégrale de (5.16.)

γ : accélération

Γ_k^i : fonctions définies par (5.55b)

δ : épaisseur de couche limite

ζ : variable d'intégration

$\varepsilon_u^+, \varepsilon_h^+$: diffusivités turbulentes définies par (7.12b)

$\eta(x,y)$: chapitre 5, variable de Blasius

$\eta(x)$: chapitre 7, variable définie par (7.20.)

θ : variable réduite de température

Θ : coefficient défini par (3.1.)

κ : coefficient de conductibilité thermique du fluide "simulant" (cal/cm^2.s°C)
chapitre 8, constante de décroissance exponentielle (8.27.)

μ : viscosité dynamique (poises)

μ_G, μ_e, μ_0 : nombres de Sherwood (8.24. à 8.26.)

ν : $\frac{\mu}{\rho}$, viscosité dynamique

ξ : variable d'intégration
chapitre 3 et annexe 1 : paramètres de courbure du cylindre
chapitre 5 : variable définie par (5.15.)

π_{Ri}^k, π_{Si}^k : fonctions définies par (7.8.) et (7.9.)

ρ : masse volumique (g/cm^3) du réactif, ou du fluide "simulant"

$\sigma, \sigma_{turb.} = \frac{\theta}{\theta_{cst}}$ coefficients de correction à la variation des propriétés physiques de l'eau

$\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_{turb.}$: coefficients correspondants pour la correction de courbure transverse

σ : coefficient introduit par Yu (déf. 6.8.)

σ : chapitre 8, constante de Stefan Boltzman

τ : contrainte tangentielle

ϕ : densité de flux de chaleur (cal/cm^2.s)

Φ = ϕ S, flux de chaleur (cal/cm^2)

χ : chapitre 8, paramètre = R_1/R
annexe 1, paramètre Ln R_e/R_i

ψ : fonction de courant (5.21.)
variable d'intégration

Ψ : $1-m_w$ (chap. 5)

PARAMETRES ADIMENSIONNELS

$R_x = \frac{Ux}{\nu}$: nombre de Reynolds

$Pr = \frac{\nu}{a}$: nombre de Prandtl

$Sc = \frac{\nu}{D}$: nombre de Schmidt

$Pe = \frac{Ux}{D}$: nombre de Peclet pour la diffusion

$Pe_{th} = \frac{Ux}{a}$: nombre de Peclet pour la chaleur

$Nu = \frac{\phi x}{\lambda \Delta T}$: nombre de Nusselt

$Sh = \frac{Jx}{\rho D \Delta C}$: nombre de Sherwood (voir aussi μ_i)

$Gr = \frac{g\beta \Delta T \ell^3}{\nu^2}$: nombre de Grashof

$St = \frac{J}{\rho U_e \Delta C}$: nombres de Stanton

$= \frac{\phi}{U_e \rho C_p \Delta T}$

$Da = \frac{k(\rho C_e)^{n-1}\ell}{D}$: nombre de Damkhöler

INDICES

c : chimique

cst : à propriétés physiques constantes

e : dans l'écoulement libre

exp : expérimental

iso : dans le cas d'une paroi isotherme, où à concentration constante

lam : laminaire

m : moyen (chapitre 8)

o : au début de la catalyse

r : de référence

R,S : distinguent, au chapitre 7.1., les expressions dues à Rubesin et Seban

t,turb : en turbulent

théo : théorique

w : à la paroi

∞ : à l'infini

APOSTROPHES

* : désigne un nombre adimensionnel

+ : Reynolds, ou vitesse réduite, ramenés à la vitesse de frottement

Introduction

Les études concernant la couche limite de diffusion avec réaction chimique suscitent depuis une vingtaine d'années un intérêt croissant. Le problème qu'on s'y pose est essentiellement celui de l'intéraction d'un écoulement et d'une ou plusieurs réactions chimiques. C'est donc en premier lieu le chimiste qui est intéressé par le résultat de ces études : au laboratoire, la connaissance de l'influence des paramètres hydro-(ou aéro) dynamiques peut lui permettre de dégager d'un résultat global la cinétique vraie d'une réaction. Dans la pratique industrielle, le technicien du génie chimique aura à calculer l'incidence de ces paramètres sur le rendement de l'installation qu'il construit.

Mais ce problème se rencontre en d'autres occasions : ainsi, dans un usinage chimique par ablation, on utilise un jet de produit corrosif pour modeler une surface métallique. Lorsqu'on place une plaque froide dans un jet gazeux à très haute température (plasma ou flamme), des espèces (états métastable, radicaux libres) diffusent dans le jet pour se recombiner à la paroi. Le biologiste aussi est concerné les organismes vivants sont en effet le siège de nombreux transferts entre une membrane et des courants fluides. Enfin, plus récemment, l'intérêt porté aux problèmes de l'environnement a montré l'importance de l'absorption par la végétation d'effluents gazeux toxiques (anhydride sulfureux, fluor ou de poussières transportés par le vent.

La connaissance de ces phénomènes résulte en général de l'expérience directe [46],[59],[60],[62] ou bien de prévisions théoriques [38] à [53]. L'identité, dans de nombreux cas, des équations décrivant les transferts de chaleur et de masse nous offre un troisième mode d'investigation qui consiste à remplacer l'étude du phénomène diffusif par son homologue thermique. Le but le plus évident d'une telle méthode étant de simplifier le mode expérimental, on peut déjà remarquer que l'intégra-

lité du phénomène original est restituée (structure de la turbulence, par exemple), sans faire intervenir les hypothèses simplificatrices auquel le calculateur doit recourir la plupart du temps.

On a souvent utilisé l'analogie électrique [94] pour résoudre les problèmes de transfert (de masse, de chaleur, ou de quantité de mouvement) décrits par une équation de Laplace. L'identité des transports massiques et thermiques a été moins utilisée. Peu d'études de couches limites avec réaction pariétale ont été menées par le procédé, et à notre connaissance, seulement à l'ordre un. C'est pourquoi nous avons entrepris la construction d'un dispositif destiné à la simulation thermique d'un réacteur cylindrique axial, dont la surface extérieure décrit le siège de réactions d'ordres divers.

Nous préciserons, dans un premier chapitre, le principe de la simulation thermique.

Le chapitre 2 décrira le simulateur que nous avons conçu. La réalisation d'un écoulement d'eau a exigé la construction d'une soufflerie hydraulique : elle sera décrite dans le même chapitre.

Les propriétés de l'eau sont variables avec la température : nous devrons donc étudier l'effet de cette variation et chercher des corrections. Elles seront établies au chapitre 3. Dans ce même chapitre seront traités les problèmes posés par la courbure transversale.

Le chapitre 4 contient les résultats d'une étude en régime laminaire. Le champ de vitesses est déterminé par anémométrie Laser-Doppler. L'influence des différents paramètres de la simulation sera montrée expérimentalement.

Le chapitre 5 traite du calcul des concentrations pariétales en régime laminaire. Après une revue bibliographique, nous y présentons la méthode utilisée, puis nous comparons les points expérimentaux aux profils théoriques.

L'étude menée en régime turbulent sera décrite suivant le même plan : le chapitre 6 rapportera les résultat de l'étude expérimentale : profils de vitesses mesurés par anémomètre à fil chaud et profils de concentration réduits. Le chapitre 7 comparera ces résultats à ceux d'un calcul dérivé de celui du chapitre 5.

Enfin, au chapitre 8, nous tenterons de dégager les principales possibilités de la simulation thermique, dans son application à l'étude de réacteurs de géométries diverses.

Nous conclurons cette étude en traitant brièvement deux exemples : d'une part, nous montrerons la forme de "sillages catalytiques". D'autre part, nous étudierons par simulation thermique les performances d'un réacteur annulaire.

Chapitre 1

La simulation thermique

INTRODUCTION

Considérons un fluide visqueux s'écoulant autour d'un solide ; supposons que la couche limite qui se développe alors est le siège de réactions chimiques pour des composants transportés par ce fluide. Nous avons à considérer trois phénomènes :

- Un transport par *convection forcée* des espèces réagissantes.
- Un transport par *diffusion* dû aux gradients de concentration.
- Des apparitions (ou disparitions) de composants dues aux *réactions chimiques*.

Le calcul de la répartition de concentration des réactifs n'est donc plus seulement subordonné à la connaissance des paramètres chimiques, mais aussi à celle des conditions hydrodynamiques (ou aérodynamiques). De plus, les trois modes de transport sont couplés.

Dans tout ce qui suit, nous nous limiterons au problème posé par les variations de concentration d'un seul composant. En d'autres termes, l'expression de la loi de cinétique chimique ne contient qu'une seule concentration. Ce cas se rencontre couramment : si l'un des réactifs est le fluide porteur et l'autre un soluté faiblement dilué dans le premier, seule la concentration de ce soluté subira de notables changements. Dans un usinage chimique par ablation, c'est la vitesse de dissolution de l'ion métallique arraché à la paroi qui détermine la cinétique réactionnelle. Dans certains problèmes de pollution, on s'intéresse à la concentration d'un effluent toxique (SO_2 ; CO_2, F, poussières) qui diffuse dans la couche limite atmosphérique pour être absorbé par la végétation.

Cette restriction n'entraîne d'ailleurs pas que la couche limite n'est le siège que d'une seule réaction. Elle implique simplement que les différents processus diffusionnels et réactionnels, propres à chaque espèce contenue dans la couche limite, sont découplés.

Nous imposerons encore une condition aux systèmes étudiés ici : on distingue deux types de problèmes :

1) la réaction a lieu dans toute la couche limite ; il y a réaction homogène,

2) la réaction est confinée à la paroi ; on dit qu'il y a réaction hétérogène.

C'est ce dernier cas qui nous intéresse ici.

On rencontre de nombreux exemples de couche limite avec réaction hétérogène d'un composant. Hormis les cas cités plus haut, on peut citer les oxygénateurs sanguins (où l'injection peut se ramener à une réaction d'ordre un [56]) ou certaines recombinaisons sur des parois froides placées dans un jet de plasma.

Remarquons enfin que, dans l'hypothèse d'une réaction hétérogène, on peut distinguer trois cas :

1) La réaction est extrêmement rapide : la concentration à la paroi est une concentration d'équilibre ; le problème se ramène au cas du flux dans une couche limite à concentration de paroi constante. On dit que la couche est controlée par la diffusion.

2) La diffusion est extrêmement rapide : c'est la réaction chimique qui détermine le flux à la paroi : la couche limite est chimiquement controlée.

3) La diffusion et la réaction chimique ont des cinétiques comparables : on ne peut plus alors découpler les effets des trois transports dans le calcul du flux de diffusion.

On définit le critère de Damkhöler de la forme :

$$Da = \frac{k}{D} L$$

Ce nombre adimensionnel exprime le rapport de vitesse de réaction à la vitesse de diffusion.

1.1. LE PRINCIPE DE LA SIMULATION THERMIQUE

Les modes de transport couplés, convection, diffusion, réaction, se retrouvent dans le cas d'un transfert de chaleur : on y assiste en effet à la compétition de trois phénomènes : convection, conduction thermique, flux pariétal (chauffage ou refroidissement). La similitude des équations décrivant ces transports conduit à penser que la connaissance de l'un des deux groupes de phénomènes peut amener celle de l'autre type de transport.

Dans le cas simple d'une plaque plane à "force" constante ($T_w - T_e$ = Cte ; $C_w - C_e$ = Cte), on emploie les mêmes formules pour décrire le transfert de chaleur et celui de masse [6]. Ainsi Sogin [17] en utilisant la sublimation du naphtalène sur une plaque plane, vérifie-t-il des coefficients de transfert valables aussi pour un phénomène thermique.

Nous allons montrer ici comment, en imposant une correspondance entre le flux thermique et la température pariétale, on obtient des informations sur la couche limite de diffusion avec réaction chimique de paroi.

Des études ont déjà utilisé cette idée : Goddard [54] et Lassau [45] ont simulé une réaction du premier ordre à l'aide d'une plaque chauffée à température constante recouverte d'une plaque isolante. Plus récemment, Lassalles [55], [56] a introduit du gaz carbonique dans une couche limite d'eau par une cinétique d'ordre un, à travers une membrane perméable à ce gaz. Ce principe limite, nous le verrons, l'étude aux réactions du premier ordre.

C'est pourquoi nous avons entrepris la construction d'un dispositif permettant l'étude par simulation thermique de réactions d'ordre quelconque, de cinétique variable dans le cas de couches limites laminaires et turbulentes.

1.2. LES EQUATIONS

Précisons le principe de cette simulation en écrivant les équations régissant les différents transports dans la couche limite. Nous examinerons le problème d'une manière plus générale au chapitre 8. Toutefois, la plus grande partie des manipulations et de l'étude théorique se ramènent à une géométrie plane ; nous exposons donc le principe de notre étude dans le cas d'une couche bi-dimensionnelle. De plus, le fluide est considéré comme incompressible et à propriétés constantes. La vitesse U_e est trop faible pour que l'échauffement cinétique soit appréciable. Il n'y a pas non plus de convection naturelle.

Ecrivons les équations gouvernant, dans un tel fluide, appelé A, le transport par diffusion d'un composant, en concentration C_e à l'infini, qui disparaît à la surface de la plaque par suite d'une réaction d'ordre n, et de cinétique k.

Avec les notations usuelles (rappelées dans la nomenclature) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1.1.)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_A \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1.2.)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_A \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \qquad (1.3.)$$

(1.1.) exprime la continuité du fluide vecteur, (1.2.) la conservation de quantité de mouvement, (1.3.) la conservation des espèces.

Les solutions de ce système sont déterminées par les conditions aux limites :

- conditions à l'extérieur de la couche limite :

$$\left.\begin{array}{lll} x = 0 & y \neq 0 & u \to U_e \\ x \neq 0 & y \to \infty & C \to C_e \end{array}\right\} \qquad (1.4a) \text{ et } (1.5a)$$

- condition de non glissement :

$$x \neq 0 \qquad y = 0 \qquad u = 0 \qquad (1.4b)$$

- condition exprimant que le flux pariétal de diffusion (u = 0) est égal à la disparition par voie chimique :

$$x \neq 0 \qquad y = 0 \qquad -J_w = +\rho D_A \left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{y=0} = k(\rho C_w)^n \qquad (1.5b)$$

Les conditions (1.4.) déterminent, avec (1.1.) et (1.2.) le champ de vitesses. Dans le cas d'une apparition de réactif, les équations restent les mêmes, en prenant k négatif.

Ecrivons maintenant les équations décrivant un transfert thermique dans la couche limite d'un fluide B possédant les mêmes propriétés que la précédente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1.1.)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1.2.)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a_B \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (1.6.)$$

$a_B = \frac{\lambda_B}{\rho C_p}$ est la diffusivité thermique du fluide B avec les conditions aux limites :

$$\left.\begin{array}{lll} x = 0 & y \neq 0 & \\ x \neq 0 & y \to \infty & \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} u = U_e & (1.4a) \\ C \to C_e & (1.7a) \end{array}$$

$$x \neq 0 \qquad y = 0 \qquad u = 0 \qquad (1.4b)$$

On impose une densité de flux ϕ à la paroi :

$$x \neq 0 \qquad y = 0 \qquad \phi = - \lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_w \qquad (1.7b)$$

Réécrivons ces systèmes sous forme adimensionnelle. Introduisons les variables réduites :

$$x^* = \frac{U_e x}{\nu} \; ; \; y^* = \frac{U_e y}{\nu}$$

$$\Theta = \frac{T_r - T}{T_r - T_e} \; ; \; m = \frac{C}{C_e}$$

où T_r est une température dite de référence.

$$Pr_B = \frac{\nu_B}{a_B}, \text{ Nombre de Prandtl du fluide B}$$

$$Sc_A = \frac{\nu_A}{D_A}, \text{ Nombre de Schmidt du fluide A.}$$

$$u^* = \frac{u}{U_e} \; ; \; v^* = \frac{v}{U_e}$$

Le système A s'écrit :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \qquad (1.8.)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \qquad (1.9.)$$

$$u^* \frac{\partial m}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial m}{\partial y^*} = \frac{1}{Sc_A} \frac{\partial^2 m}{\partial y^{*2}} \qquad (1.10.)$$

$$x^* = 0 \qquad y^* \neq 0 \qquad \begin{cases} u^* \to 1 & (1.11a) \\ m \to 1 & (1.12a) \end{cases}$$

$$x^* \neq 0 \qquad y = 0 \qquad u^* = 0 \qquad (1.11b)$$

$$\left.\frac{\partial m_w}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = \frac{k}{D_A} \frac{U_e}{\nu_A} (\rho C_e)^{n-1} m_w^n \qquad (1.12b)$$

où

$$m_w(x) = m(x,0)$$

Le système B s'écrit : (1.8.) et (1.9.) restent inchangés

$$u^* \frac{\partial \Theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr_B} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^{*2}} \qquad (1.13.)$$

$$x^* = 0 \qquad y^* \neq 0 \qquad \begin{cases} u^* \to 1 & (1.11a) \\ \Theta \to 1 & (1.14a) \end{cases}$$

$$x^* \neq 0 \qquad y = 0 \qquad u^* = 0 \qquad (1.11b)$$

$$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = \frac{\phi U_e}{\nu_B \cdot \lambda_B (T_r - T_e)} \qquad (1.14b)$$

Les systèmes A et B sont formellement identiques lorsque deux conditions sont remplies :

$$Sc_A \equiv Pr_B \qquad (1.15.)$$

$$\frac{\phi}{\lambda_B (T_r - T_e)} \equiv \frac{k}{D_A} (\rho C_e)^{n-1} m_w^n \qquad (1.16.)$$

Ces deux conditions entraînent l'identité des champs des variables $\theta(x^*,y^*)$ et $m(x^*,y^*)$. Le but de notre étude est de les réaliser et de déduire ainsi des champs de concentration d'une étude thermique. On aura une simulation thermique du phénomène diffusif.

(1.15.) est une identité à caractère physique : elle exprime que le rapport de la diffusion à la convection dans le fluide A est le même que celui de la conduction thermique au transport convectif dans le fluide B. Elle subordonne en fait le choix du fluide simulateur aux propriétés du fluide vecteur.

(1.16.) est une condition à réaliser expérimentalement à la paroi pour que la simulation soit complète. Elle implique une paroi chauffante qui distribue une densité de flux ϕ dépendant de la température de surface T_w suivant la loi :

$$\boxed{\phi = \frac{k}{D} (\rho C_e)^{n-1} \times \lambda (T_r - T_e)\ \theta_w^n} \qquad (1.17.)$$

Nous écrirons aussi :

$$\phi = K\theta_w^n = K_{th} . K_c . \theta_w^n \qquad (1.17.)'$$

K dépend de deux classes de paramètres. Il est le produit de deux groupements :

1) $K_{th} = \lambda(T_r - T_e) = \lambda\ \Delta T_r$ est relatif au fluide simulateur B. On est libre du choix de T_r.

2) $K_c = \frac{k}{D} (\rho C_e)^{n-1}$ est relatif au fluide A original. Il mesure les importances relatives des phénomènes chimique $[k(\rho C_e^{n-1})]$ et diffusif (D).

Les phénomènes A et B étant rendus équivalents par (1.17.), nous appelerons K constante de cinétique thermique* et (1.17.) loi de cinétique thermique.

---

*Aucun phénomène de thermochimie n'intervenant, il ne peut y avoir de confusion avec une réaction exo (ou endo) thermique.

1.3. IMPORTANCE DU PARAMETRE K

L'examen de 1.17. montre que la réalisation d'une seule "cinétique thermique" nous informe sur toute une classe des "cinétiques chimiques".

En effet, $K = K_{th} K_c$.

Fixons K_{th}. K_c étant le rapport de $k(\rho C_e)^{n-1}$ et D, si on fixe D, on voit qu'on peut faire varier C_e pour connaître les résultats relatifs à une cinétique k donnée. En effet, on obtient des concentrations réduites, et C_e n'obéit qu'à une condition : il doit être faible, comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre. Remarquons qu'à l'ordre un, $K_c = k/D$, ce qui exclut cette possibilité.

Dans K_{th} apparaît le paramètre $\Delta T_r = T_r - T_e$; T_e est imposée par les conditions de la manipulation, mais T_r peut être choisie dans de larges limites.

T_r a un double rôle.

1) Une simulation ayant été effectuée avec un K donné, la variation de K_{th} due aux choix de T_r permet d'élargir à tout une gamme de cinétiques k le résultat obtenu.

2) En simulant une réaction donnée, on peut jouer sur T_r pour obtenir, dans la zone de réacteur étudiée une variation plus ou moins grande de $m_w(x)$. T_r intervient en effet dans la définition de K et de θ. Nous mettrons expérimentalement cette possibilité en évidence en 4.2.

T_r a une autre propriété : c'est la température au-delà de laquelle la simulation n'a plus de sens physique : Mathématiquement, les systèmes A et B sont identiques. Physiquement, la variation de m est limitée à l'intervalle $[0,1]$. Ceci est particulièrement évident dans le cas d'un chauffage à flux ϕ = constant, qui est la simulation d'une réaction d'ordre zéro. Si l'on chauffe sur une longueur suffisamment grande, la température de paroi T_w dépassera T_r. La variable θ_w sera alors négative. Il n'y aura pourtant simulation thermique que pour $T_w < T_r$. En effet, la nullité de m_w signifie que tout le réactif a disparu à la surface. (A la rigueur, on pourrait admettre que le catalyseur "rend" du réactif : on n'aurait pas pour autant une concentration négative.

1.4. L'UTILITE D'UNE VARIABLE GENERALISEE

1) Jusqu'ici, nous avons considéré la concentration réduite pariétale comme une fonction d'une variable linéaire dimensionnelle. K nous a fourni un moyen de généraliser les résultats d'une simulation.

On peut écrire de façon tout à fait générale les résultats relatifs à une réaction chimique, en adjoignant à la variable de position des paramètres chimiques et hydrodynamiques.

L'analyse dimensionnelle conduit à une variable de la forme :

$$z = G_n(kC_e^{n-1},\ D,\ U_e,\ \nu)x \qquad (1.18.)$$

Dans le cas d'une plaque plane en régime laminaire, par exemple, nous introduisons au chapitre 5 :

$$\sqrt{G_n} = \frac{k(\rho C_e)^{n-1}}{D}\sqrt{\frac{\nu}{U_e}} \times \frac{1}{\Theta} \qquad (1.19.)$$

où

$$\Theta = 0{,}332\ Sc^{1/3} \qquad (1.20.)$$

L'analogue thermique de cette variable s'écrira, d'après (1.16.) et (1.17.) :

$$z = \left[\frac{K}{\lambda \Delta T_r \Theta}\sqrt{\frac{\nu}{U_e}}\right]^2 x \qquad (1.21.)$$

En régime turbulent, la variable réduite de position, x^+, ne contiendra pas de paramètre chimique :

$$x^+ = \frac{U_f}{\nu}(x - x_0) \qquad (1.22.)$$

U_f est la vitesse de frottement. On aura un réseau $m = m(x^+)$ avec pour paramètre

$$H = \frac{U_f}{\nu}\frac{D}{k(\rho C_e)^{n-1}}$$

Dans le domaine des géométries de catalyseur où une variable généralisée est valable, une simulation donne des informations sur une gamme étendue d'écoulements avec catalyse pariétale.

2) A ceci s'ajoutent des avantages d'ordre expérimental :

- La reproductibilité d'un phénomène thermique est meilleure que celle d'une réaction chimique : les paramètres thermiques sont bien définis. Il est quelquefois plus difficile de reproduire les conditions expérimentales d'une réaction chimique (pH, température).

- La mesure des températures est en général plus simple, et pourtant, plus précise, que celle des concentrations. En particulier, lorsque de petites dimensions des sondes sont nécessaires, la construction d'un thermomètre à résistance est plus aisée que celle d'une sonde à pH miniaturisée, par exemple.

- En régime turbulent, les études dans le domaine de la réaction chimique sont surtout axées sur des calculs théoriques : ceux-ci utilisent des hypothèses diverses sur la structure de la turbulence. Dans l'état actuel de nos connaissances, ces calculs ne peuvent tenir compte que fragmentairement de la réalité. La simulation thermique, elle, respecte intégralement la structure dynamique de l'écoulement.

Ayant ainsi défini les raisons qui nous ont incités à la réalisation d'un "modèle" de simulation thermique, nous allons décrire ce dispositif.

Chapitre 2

Le dispositif experimental

Les paramètres qui déterminent le champ de la variable $\theta(x,y)$ sont :

1) La vitesse à l'infini U_e de l'écoulement (laminaire ou turbulent).

2) Les propriétés du fluide "simulant" :
   - dynamiques (μ, ρ, ν)
   - thermiques (λ, P_r)

3) Les caractéristiques de la cinétique de paroi : K, n.

4) La température de référence : T_r.

5) La géométrie du modèle et la répartition du catalyseur sur sa surface.

1) et 2) définissent l'écoulement "à l'infini" du modèle. Nous décrirons ici des expériences menées, en régime laminaire et turbulent, dans des écoulements d'eau. Dans un gaz, le transfert de chaleur par rayonnement, fonction de la température de paroi, n'est pas toujours négligeable. Une correction est alors nécessaire qui porte sur la loi de cinétique. Dans un liquide, cette correction ne s'impose plus, d'où le choix de l'eau. Par contre ceci nous aménera au chapitre 3, à examiner les problèmes posés par la variation des propriétés du fluide avec la température.

Afin de limiter les flux thermiques à travers les couches d'isolant du modèle de simulation, nous avons travaillé avec une certaine marge de sécurité dans les flux utilisés. Ceci nous a imposé des vitesses d'écoulement faibles. Les couches limites s'épaississent et l'influence de la courbure transversale n'est plus négligeable. La construction d'un modèle (ou le choix d'un domaine de travail) est le résultat d'un compromis entre ces diverses exigences.

Nous décrivons en 2.1. la soufflerie construite pour obtenir l'écoulement 1).

Le modèle de simulation, permettant de produire la cinétique 3), est un cylindre fragmenté en trente six éléments chauffants annulaires. Il est décrit en 2.2.

Les moyens de mesure et de contrôle du chauffage font l'objet du paragraphe 3.3.

2.1. LA SOUFFLERIE HYDRAULIQUE

La soufflerie hydraulique (fig. 2.1.) est en circuit fermé. Elle comporte deux veines de même diamètre que le circuit principal. L'une d'elles est plus particulièrement réservée à l'étude des couches limites extérieures, l'autre permet de disposer d'un régime turbulent établi, pour les études d'écoulement intérieur.

Le mouvement du fluide est obtenu à l'aide d'une pompe volumétrique à engrenages. Le réglage de la vitesse s'effectue de deux manières :

- un by-pass placé directement aux brides de la pompe dérive une partie du débit. La répartition de l'écoulement est fonction du réglage des vannes (A) et (B) (fig. 2.1.).

- le débit de la pompe est sensiblement proportionnel à sa vitesse de rotation ; on peut faire varier cette dernière.

Le circuit est en acier. Les parties cylindriques sont en tube d'acier 300 DN de diamètre intérieur 310 mm. La longueur totale du circuit est de 11,2 m. L'axe du circuit supérieur est à 1,5 m du sol.

Partant de la bride de sortie de la pompe et suivant le fluide dans son mouvement, on rencontre : (Les références renvoient à la figure 2.1.)

- Un divergent de raccordement à une partie linéaire basse du circuit, coupée par la vanne (A) de diamètre 300 DN.

- Deux coudes (300 DN) qui amènent le fluide dans la chambre de tranquillisation. Entre ces deux coudes, on trouve un manchon en caoutchouc (10) destiné à amortir la propagation des vibrations mécaniques. Le coude supérieur est garni sur toute sa longueur de huit ailettes planes destinées à supprimer l'effet d'hélice engendré par la courbure transversale.

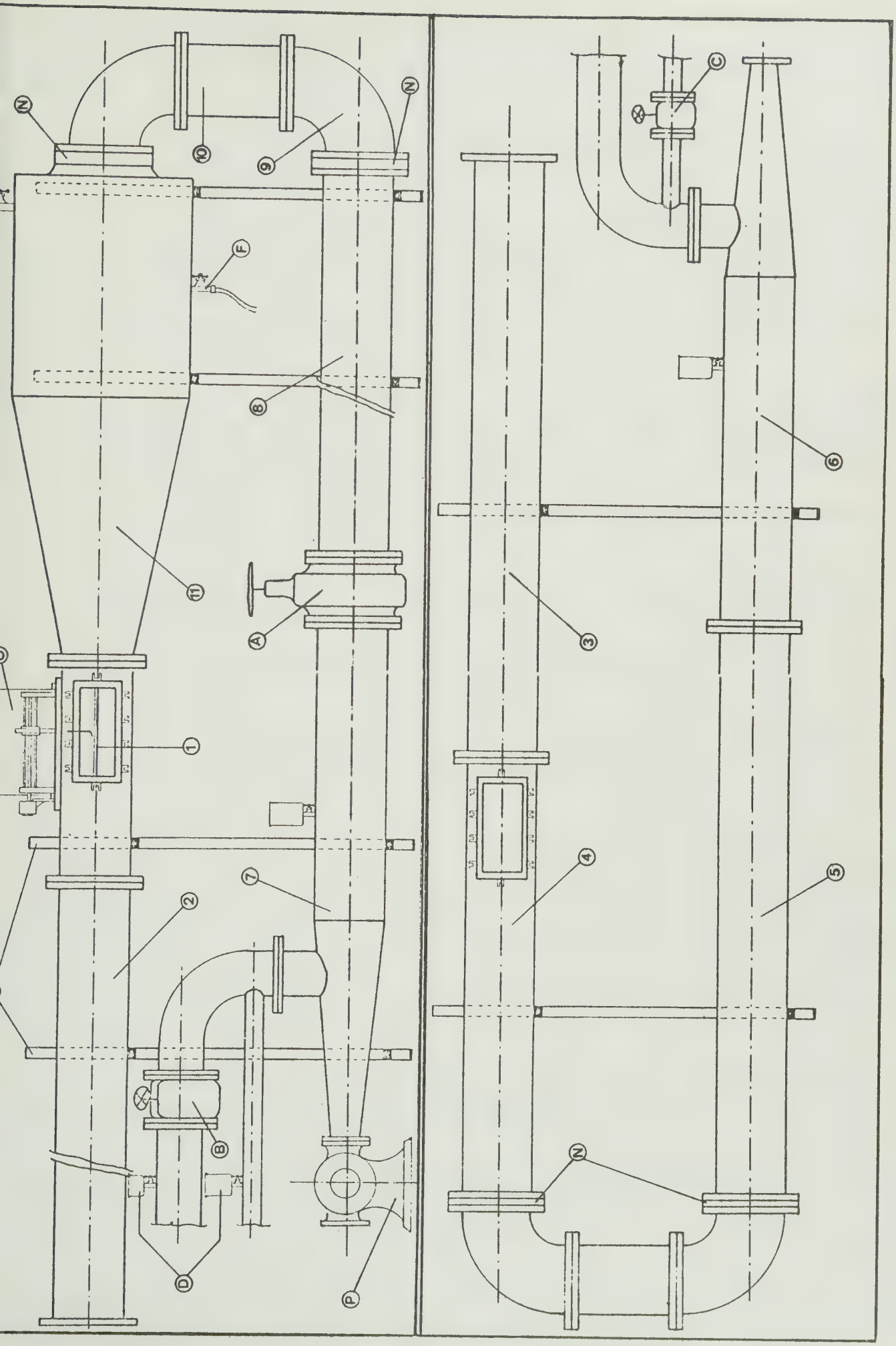


Fig. 2.1. : Schéma de la soufflerie

- La chambre de tranquillisation (N), cylindrique, de diamètre intérieur 800 mm, et de longueur 1000 mm, est garnie de nid d'abeilles, de grilles et d'un filtre en tissu destiné à retenir l'essentiel des particules en suspension dans le fluide.

- Le convergent (11), de longueur 1200 mm, débouche sur la première veine, de diamètre 310 mm, ce qui donne un rapport de contraction de 6,6 en section.

- La première veine (1) a été utilisée dans les manipulations décrites plus loin. Elle mesure 1000 mm de long. Un hublot couvre une longueur de 400 mm. Sa position est décentrée, mais la veine peut être retournée. La partie transparente des hublots reproduit la forme cylindrique de l'intérieur de la veine ; pour qu'il n'y ait pas de discontinuité, elle est montée dans un cadre métallique qui se loge dans un support rectangulaire soudé sur le tube.

Nous avons utilisé deux modèles de partie transparente : soit un bloc d'altuglas plein usiné, soit un modèle creux en makrolon (matière plastique transparente) rempli d'eau, pour les mesures d'anémométrie Doppler-Laser (Chapitre 4.1.).

Cette veine est surmontée d'un porte-sonde qui est décrit au chapitre 6.1.

- Un élément de tube droit (2), (3) permet d'établir un régime turbulent à l'intérieur de la seconde veine (4). Sa longueur est de 4,5 m.

- La seconde veine (4) est semblable à la première.

- Le retour à la pompe s'effectue à travers deux coudes, séparés par un manchon élastique identique au précédent, une autre section basse droite et un convergent de raccordement à la bride d'aspiration de la pompe (P.)

La pompe est un modèle HACH 100 fabriqué par les Etablissements Hibon. Son débit maximal, 125 m^3/h, est obtenu pour une vitesse de rotation d'environ 500 t/m. Ceci correspond à une vitesse maximale d'étude de 46 cm/s. Elle est entraînée par un moteur Cazenave de 10 CV à rotor bobiné, qui permet de faire varier sa vitesse à l'aide d'un rhéostat triphasé branché sur son collecteur. La vitesse maximale de ce moteur étant de 1450 t/mm, la liaison se fait par poulies et courroies de transmission. Les vitesses du fluide dans la veine variant de 4 cm/s à 30 cm/s environ, la variation de vitesse du moteur s'est révélée insuffisante. Nous avons donc fait usage du by-pass.

De sérieux problèmes de corrosion nous ont obligé à recouvrir l'intérieur du circuit d'une peinture anti-rouille (Corax).

Ce circuit a été conçu pour l'utilisation de différents fluides (afin de faire varier, entre autres paramètres, le nombre de Prandtl).

C'est la raison de l'emploi d'une pompe à engrenages qui autorise des viscosités de 1 centipoise à 1 poise.

Toutefois ce choix présente un inconvénient ; ce type de machine induit beaucoup plus de vibrations qu'une pompe centrifuge.

Tous les éléments scellés au sol sont isolés par des tampons antivibrations (Grip-sol) et la partie servant aux études aérodynamiques est isolée par des manchons élastiques.

La transmission par le circuit des vibrations a ainsi été limitée au maximum. Toutefois, nous n'avons pu éliminer la part due à la transmission dans le fluide. Ce problème sera évoqué au chapitre 6.

A la sortie du convergent et dans le premier mètre de tuyau qui constitue la veine (1), on peut supposer que le profil des vitesses radial est pratiquement rectiligne (faible épaisseur de couche limite) ; nous avons d'ailleurs vérifié expérimentalement cette hypothèse.

La connaissance de la vitesse U_e se ramène alors à celle du débit dans la section principale du circuit hydraulique.

C'est pourquoi nous avons construit un diaphragme qui est monté au niveau de l'entrée de la seconde veine. Le diamètre de l'orifice est de 72,54 mm, soit un rapport des diamètres β de 0,234. Ce diaphragme répond à la norme NF-X-10-102, à partir de laquelle nous avons calculé la courbe donnant la perte de charge en fonction du débit. Il existe deux modes de mesure de la différence de pression entre face amont et aval :

1) La méthode dite *vena contracta*, plus satisfaisante pour l'esprit, consiste à placer les points de mesure en dehors de la zone contractée de la veine fluide. Les prises de pression auraient été placées au milieu d'un tuyau de deux mètres de long, et les orifices n'auraient pu être correctement usinés.

2) Aussi avons nous placé les prises de pression directement au voisinage du diaphragme. Les pertes de charge sont mesurées à l'aide d'un manomètre composé d'un tube de verre et d'un réservoir de grandes dimensions. Ainsi la hauteur du liquide est lue directement sur le tube. Le liquide manométrique est de l'eau pour les faibles vitesses. Pour les plus fortes vitesses, nous avons utilisé un tube en U rempli de mercure.

C'est avec cette soufflerie que nous générons l'écoulement dans lequel nous avons placé le modèle que nous décrivons maintenant.

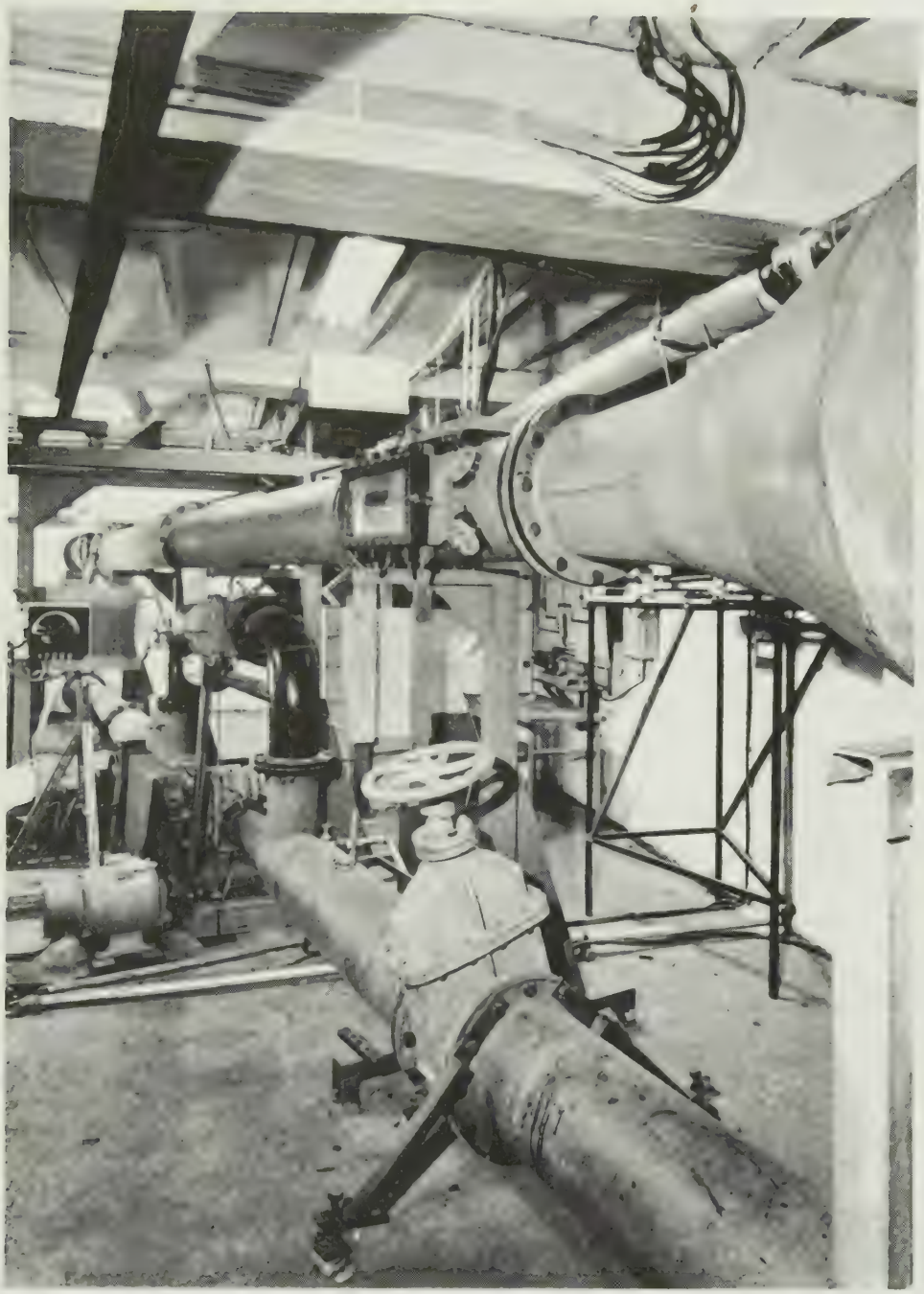


Photo n° 1 : Vue générale de la soufflerie

2.2. LE MODELE DE SIMULATION

La principale difficulté rencontrée dans une simulation thermique est la réalisation d'un modèle qui fournisse au fluide un flux thermique associé à la température de paroi suivant la loi (1.17.).

Nous avons signalé que de tels dispositifs ont déjà été réalisés. Goddard [54] ainsi que Lassau [45] ont utilisé une plaque isolante, dont un côté est léché par le fluide et l'autre maintenu à une température constante T_r par un courant de vapeur. Ainsi le flux qui traverse la plaque, de conductibilité thermique λ et d'épaisseur e, s'exprime par :

$$\phi = \lambda \frac{T_w - T_r}{e} \equiv \left[\frac{\lambda (T_e - T_r)}{e}\right] \times \theta_w \qquad (2.1.)$$

On a ainsi simulation d'une réaction d'ordre un.

Lassalles [55], [56] a utilisé un principe identique : le rôle de la plaque est joué par une membrane plane, perméable au gaz carbonique. Un côté de cette membrane développe une couche limite laminaire dans un courant d'eau. L'autre côté forme la partie supérieure d'un réservoir de gaz carbonique à pression constante.

Le flux gazeux à travers la membrane est alors proportionnel à la différence de pression partielle de gaz entre la couche limite et le réservoir : on a introduction de gaz carbonique dans l'eau par réaction d'ordre un.

Ces dispositifs permettent de réaliser continuement la loi de cinétique pariétale. Toutefois, de par leur principe, ils se limitent à l'étude de réactions d'ordre un. C'est pourquoi nous avons entrepris la construction d'un dispositif permettant la simulation de réactions d'ordres et de cinétiques quelconques.

2.2a. Le principe adopté est le suivant (fig. 2.2.) : le modèle est divisé en éléments chauffants indépendants. Pour chaque élément, nous associons la densité de flux à la puissance appropriée (n) de la moyenne sur cet élément de la variable θ_w suivant la loi (1.17.).(Remarquons que la moyenne de θ_w sur un élément est aussi la variable θ_w calculée à partir de la moyenne de la température mesurée sur cet élément, cf. Annexe 2).

On ne retrouve plus une répartition continue de T_w, comme dans les travaux précédemment cités. Toutefois une mesure de concentration est rarement continue. Nous verrons de plus que le seul inconvénient marquant de ce procédé provient d'une trop grande importance de la longueur des premiers éléments en regard de l'échelle du phénomène continu. L'annexe 2 montrera qu'on peut calculer et corriger cette influence.

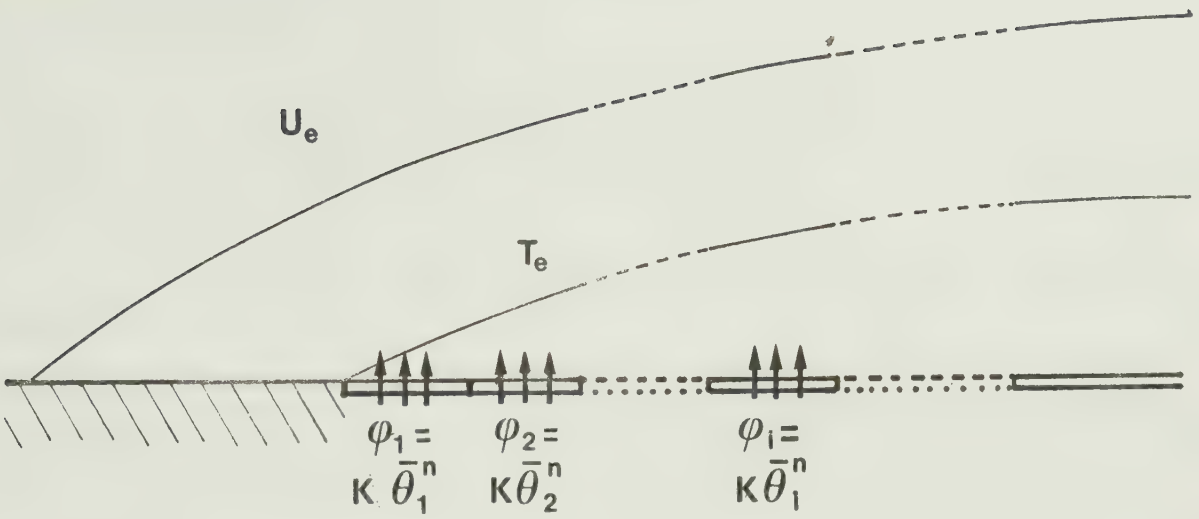


Fig. 2.2.

Nous avons sur ce principe réalisé un premier dispositif [57]. Sur un support plan epoxy moulé, rainuré à cet effet, nous avons bobiné 37 éléments de chauffage. Puis nous avons collé sur chaque élément une sonde à résistance de platine fabriquée au laboratoire, montée sur un support en acier inoxydable. Ces sondes, en fil de platine fin de 0,03 mm de diamètre, ont dû être isolées de l'eau, fluide conducteur, par une mince couche de vernis silicone. Toutefois, les gradients apparaissant dans cette couche isolante nous ont obligé à des corrections qui rendaient les manipulations délicates. C'est pourquoi nous n'avons retenu de ce système que des manipulations effectuées à l'ordre zéro [58].

Nous avons alors construit un modèle cylindrique : vu la géométrie de révolution de notre veine d'étude, cette forme peut apparaître plus logique. D'autre part, la construction d'un tel modèle s'est avérée plus aisée.

Avant le modèle décrit ci-dessous, nous avons essayé deux autres modes de montage :

- dans un premier essai les éléments étaient tous indépendants, construits en laiton. Toutefois, utilisant des fils chauffants simplement émaillés, nous avons remarqué de nombreux court-circuits, dus aux bavures, inévitables dans l'usinage du métal.

- puis nous avons construit un modèle où les anneaux chauffants étaient en bakélite. Nous nous sommes heurtés à de nombreux problèmes d'étanchéité.

Remarquons qu'en réalisant un modèle dont le support est métallique, on espère un chauffage à température d'élément constant ($T_w \sim \bar{T}_w$). En construisant un modèle à support isolant, on ne peut plus espérer qu'un flux constant sur la longueur de l'élément. Il faut noter que les pertes thermiques sont beaucoup plus faciles à éviter dans le cas d'éléments isolants.

2.2b. En définitive, *le modèle cylindrique de simulateur thermique se compose de trois parties (fig. 2.3.) :*

- Une zone d'attaque (A), que nous appelerons nez du modèle destinée à établir la couche limite, sur la partie cylindrique, sans créer les tourbillons que provoquerait une attaque abrupte. Ce nez est en téflon et a la forme d'un tronçon de paraboloïde de révolution.

- Une partie chauffante (B), cylindrique, destinée à la "catalyse thermique".

- Une partie isolante, cylindrique, (E), destinée à supprimer la répercution de l'effet de sillage dynamique sur les derniers éléments de (B). C'est un cylindre creux, construit en PVC.

Entre le nez et la partie chauffante se fixe une monture isolante (C), sur laquelle se visse le nez. Elle supporte trois tiges radiales de 8 mm de diamètre, alésées et taraudées à leur extrèmité pour recevoir trois manchons filetés qui servent à la fixation du modèle dans la veine (fig. 2.3. (H)). La fixation arrière est assurée par trois tiges identiques montées sur un collier qui serre la partie isolante (E).

Le diamètre de la partie cylindrique est 7 cm. Le nez a une longueur de 14 cm, son support (C) a une épaisseur de 2,5 cm. La partie catalytique (B) a 31 cm de long et la partie athermane (E) 19 cm.

2.2c. La zone où s'effectue la simulation est constituée de 36 éléments chauffants. Pour réduire le nombre de joints et faciliter le montage (en particulier en ce qui concerne la répartition et l'encombrement des connecteurs), ces éléments sont répartis en huit blocs annulaires [fig. 2.3. (F)] supportant entre 2 et 7 éléments chacun.

Chaque bloc est composé [Les chiffres renvoient à la fig. 2.3. (G)] :

- D'un support (1) en résine epoxy chargé (silitrolite ET 8420), qui prend la forme d'un cylindre de 7 cm de diamètre extérieur, alésé intérieurement à 4,5 cm. Les huit supports s'empilent (fig. 2.4.) sur 3 tiges filetées qui assurent la rigidité de l'ensemble. Ces tiges traversent les supports par 3 trous parallèles (2) et chaque bloc est serré par 3 écrous sur le précédent. Les alésages forment un couloir qui contient les connexions. Il faut donc l'isoler du fluide : l'étanchéité est assurée par des joints toriques ; chaque bloc possède une gorge (3) pour les recevoir.

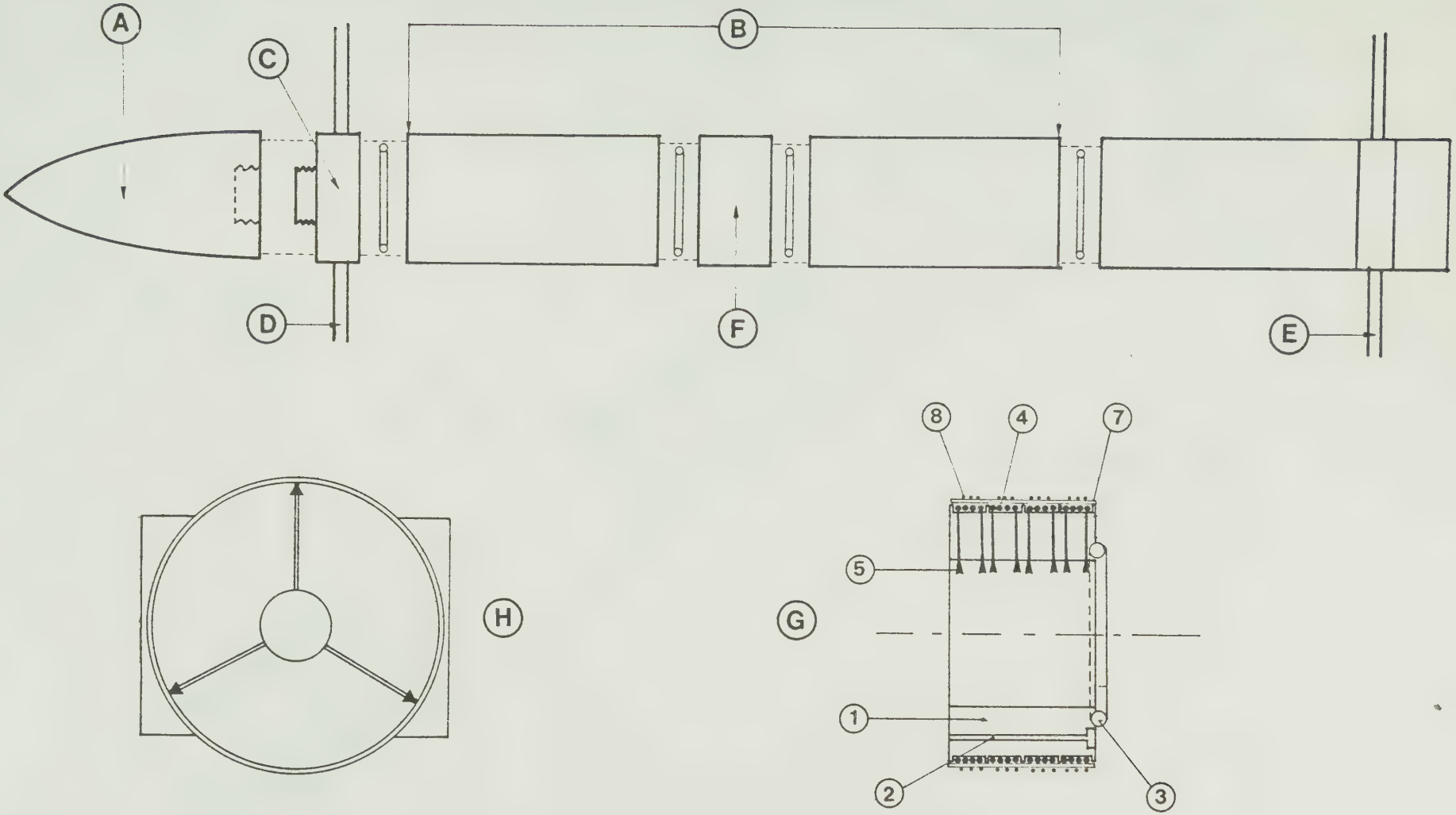


Fig. 2.3. : Le modèle de simulation thermique

H. Montage dans la veine (vue de face)

G. Coupe d'un bloc

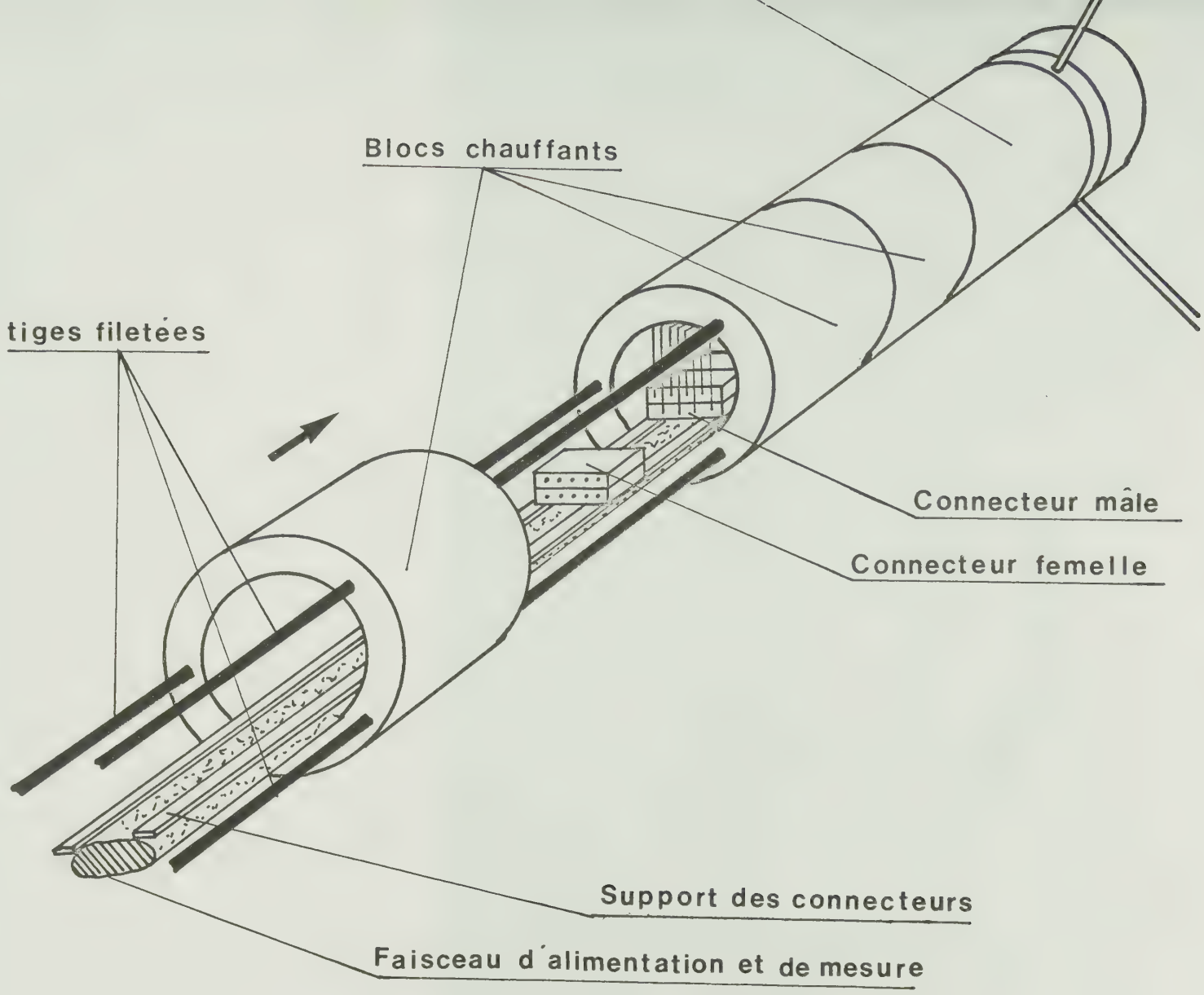


Fig. 2.4. : Montage d'un bloc du modèle cylindrique

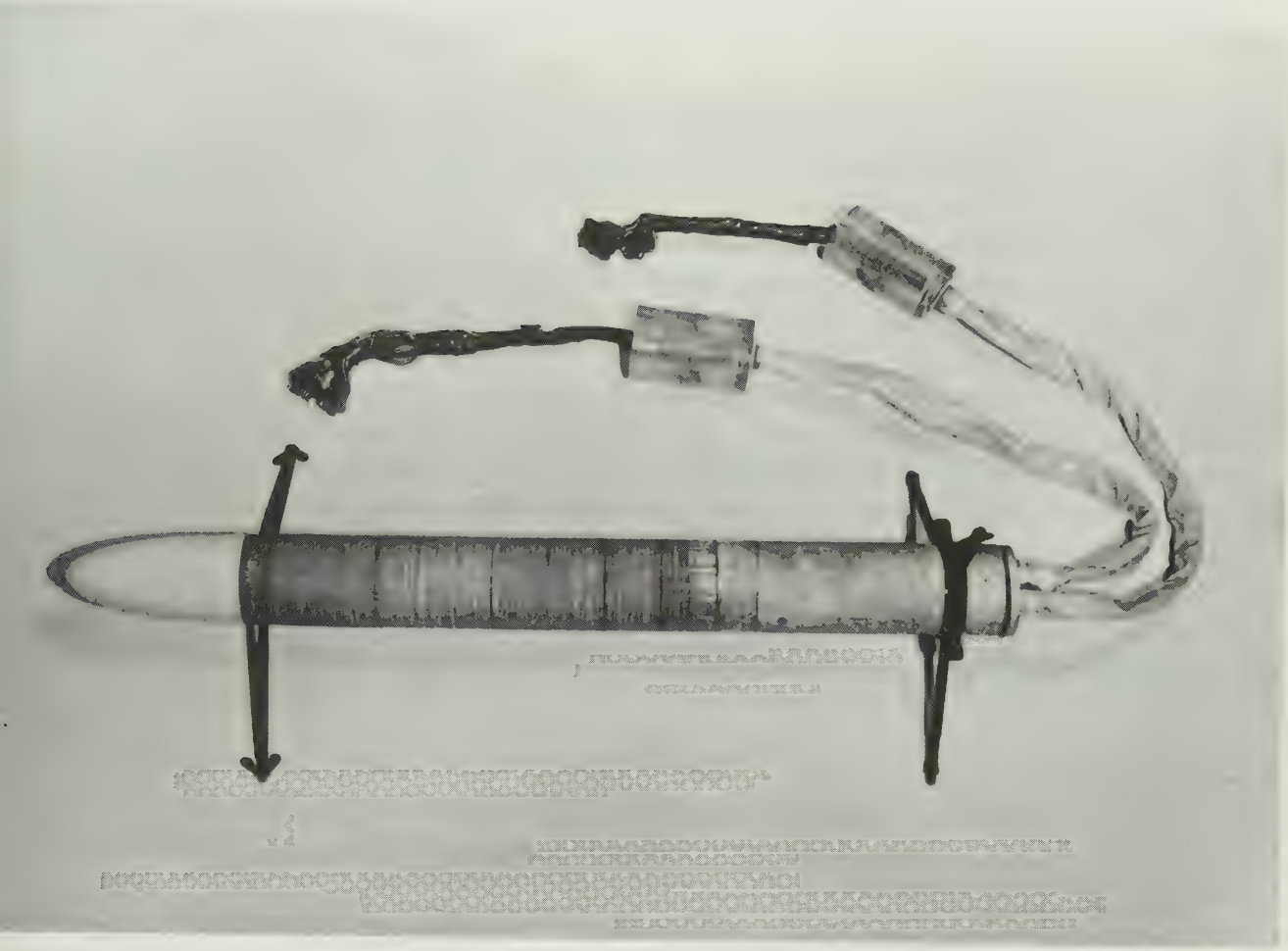


Photo n° 2 : Le modèle de simulation thermique

- Sur la périphérie de ce support sont usinées des gorges en nombre égal au nombre d'éléments supportés par le bloc ; elles ont 0,35 mm de profondeur. Deux gorges sont séparées par 0,3 mm. Dans chacune d'elles, nous avons bobiné une couche de fil de constantan émaillé (4) de 0,3 mm de diamètre que nous avons collé sur le support à l'aide d'un adhésif epoxy (silitrocol) à bonne tenue en température : Des essais nous ont permis de supporter 150°C. Les fils de chauffage traversent l'araldite pour être soudés sur des cosses (5) qui sont reliées au faisceau d'alimentation à l'aide de connecteurs(6) .

- Sur cet enroulement de chauffage est collée une épaisseur de ruban adhésif double face à support polyester, d'une épaisseur de 0,1 mm (7). Sur l'autre face, nous enroulons les sondes de température (8). Ce sont des enroulements de fil d'alliage de nickel émaillé dont la résistance croît avec la température. Le fil employé ici a deux avantages sur le fil de platine des modèles précédents : son coefficient de température est plus fort ($4,5.10^{-3}$ °C^{-1} au lieu de 3.10^{-3} °C^{-1}).

De plus, étant émaillé, il est isolé de l'eau par une couche beaucoup plus mince que tout ce qu'on peut réaliser par simple pulvérisation. Nous avons utilisé l'alliage Hytemco, fabriqué par Driver-Harris en fil émaillé de 0,1 mm de diamètre. L'intérieur du "catalyseur" contenant des tiges métalliques, nous avons, pour prévenir tout effet de transformateur, enroulé ce fil en faisant six tours dans un sens puis six tours dans l'autre. Nous supposons que douze tours répartis aussi régulièrement que possible suffisent à moyenner correctement la température. Les fils de sondes traversent le support et sont reliés à des cosses de la même manière que les fils de chauffage.

- A l'intérieur de chaque bloc les cosses de cablages sont reliées, par l'intermédiaire de connecteurs mâles et de connecteurs femelles où suivent les faisceaux d'alimentation et de mesure.

Tous les connecteurs femelles sont vissés sur deux rails solidaires de la partie isolante (E) (fig. 2.3. et 2.4.). La gaine de fils traverse l'arrière de la partie (E), et sort de la veine par deux passages étanches, pour rejoindre l'armoire de commutations et le dispositif de mesures, que nous allons décrire maintenant.

2.3. LE DISPOSITIF DE MESURES

La géométrie du "catalyseur" étant définie, la description et la réalisation d'une simulation ne sont complètes qu'avec la mesure de trois grandeurs : la vitesse U_e, la température de paroi $\bar{T}_w$ et le flux à la paroi Φ, ces deux dernières devant être associées l'une à l'autre.

La mesure des vitesses fera l'objet des paragraphes (4.1.) et (6.1.).

Nous examinerons ici les deux autres types de mesure.

2.3a. La température $\bar{T}_w$ est déduite de la résistance de sondes précédemment décrites. Elle varie suivant une loi que nous pouvons limiter au premier ordre :

$$R = R_0(1+\alpha t) \qquad (2.2.)$$

α est le coefficient de température du fil. Nous l'avons mesuré sur un échantillon, extrait de la bobine, avec laquelle toutes les sondes ont été fabriquées. L'étalonnage a été effectué en enroulant l'échantillon de fil autour d'un mince tube de cuivre à l'intérieur duquel a été enfoncé à force le réservoir d'un thermomètre à mercure au 1/10°C. Les connexions aux fils reliés à un ohmètre ont été soigneusement isolées à l'araldite. Le tout a été immergé dans un bac rempli d'eau. En additionnant de l'eau chaude, on a mesuré la courbe R = f(T) représentée fig. (2.5.). L'ohmètre, le même que celui utilisé lors de nos autres mesures, est un voltmètre numérique A.O.I.P. VNT4T équipé d'un tiroir ohmètre T3R2 (la précision obtenue sur la résistance est de 10^{-3} de la valeur lue ± 1 digit). On peut voir que la variation est linéaire dans la zone utilisée. On a mesuré ainsi un coefficient α égal à $4,5.10^{-3}$ $°C^{-1}$. Il nous restait à connaître les R_0. Cette mesure a été effectuée directement dans la veine. Laissant le fluide immobile dans la soufflerie pendant une journée (afin d'être assurée d'une température stabilisée) nous avons mesuré l'ensemble des R_i. La connaissance de la température (constante sur la longueur du modèle) de l'eau permet de connaître les R_0.

Cet étalonnage a été répété régulièrement au cours des manipulations et n'a pas révélé de modifications de R_0 dans le temps. Précisons que R_0 est de l'ordre de 70 ohms.

L'ohmètre est composé d'une source de courant et d'un voltmètre. Afin d'éliminer de la mesure de R la résistance des fils de liaison à l'ohmètre, nécessairement longs, nous avons utilisé 4 fils de liaison par sonde (2 fils d'alimentation en courant et 2 fils de mesure de tension aux bornes de la sonde). Le courant utilisé pour la gamme 0-100 Ω est de 10 mA. L'échauffement dû à l'effet joule dans les sondes est négligeable. Un rapide calcul justifie cette hypothèse :

Supposons que la chaleur dégagée par effet joule s'échappe uniquement vers le fluide. Alors le flux ϕ se calcule sur la moitié de la surface latérale du fil. La résistance de ce fil est de 28 Ω/m. Ce fil faisant 10^{-2} cm de diamètre, le flux ainsi dégagé vers le fluide est de $1,8.10^{-3}$ W/cm^2, tout à fait négligeable devant les flux traversant la surface du modèle (d'ordre de grandeur : 0,5 W/cm^2).

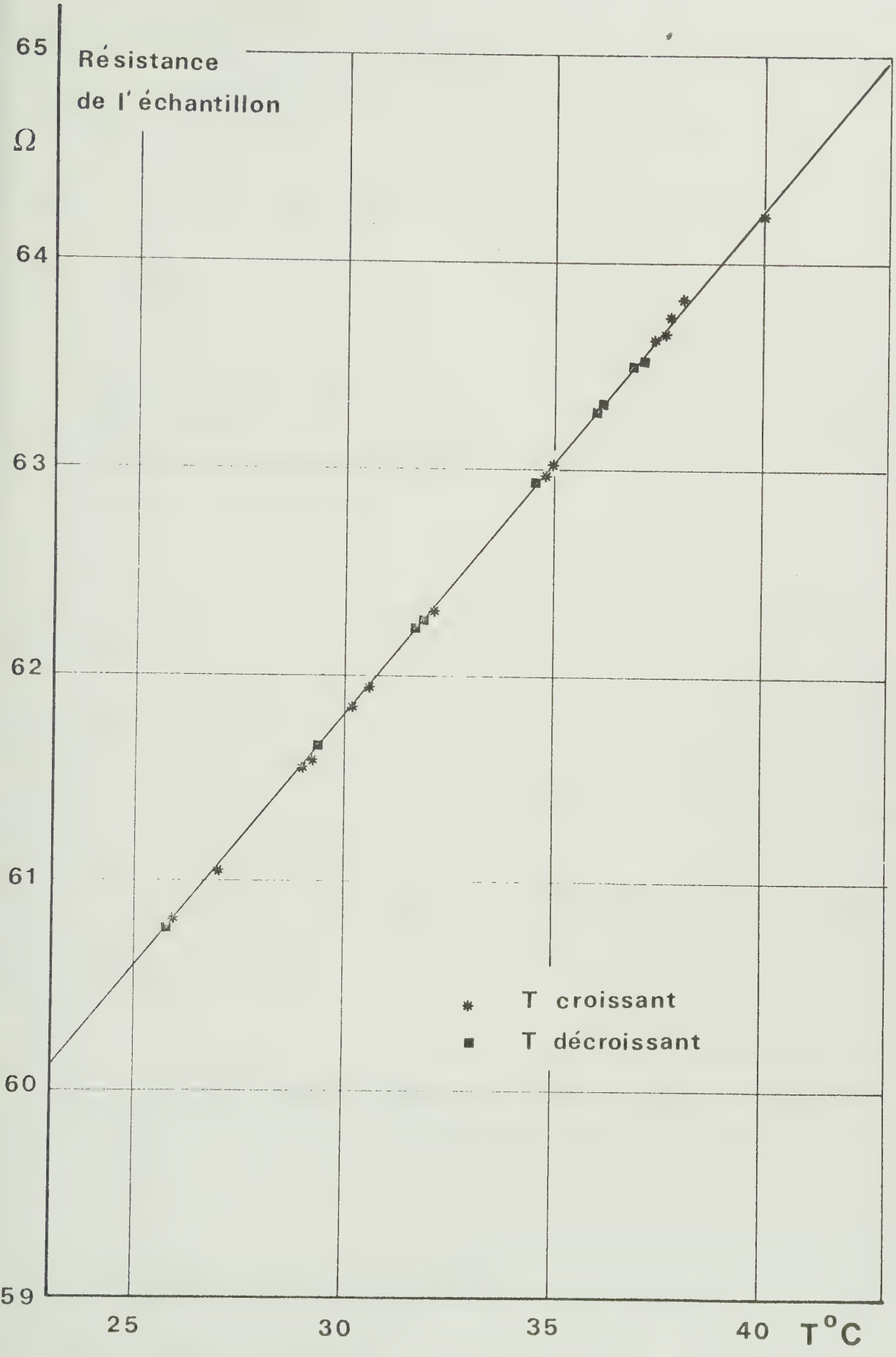
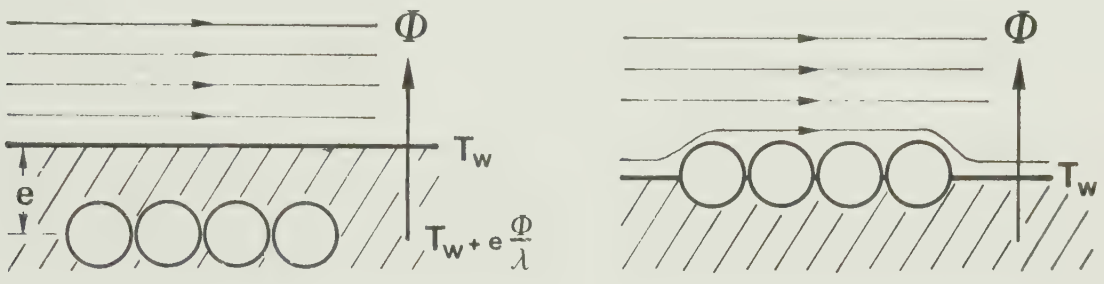


Fig. 2.5. : Mesure du coefficient de température des fils de sonde

La difficulté essentielle de la mesure d'une température de surface traversée par un flux thermique réside dans la position de cette sonde par rapport à cette surface (fig. 2.6.). En effet si la sonde (cas 1) est placée en dessous de la surface, le flux ϕ fait apparaître un gradient de température entre la surface polyester de conductibilité thermique 10^{-3} cal/cm.s° un flux de 1 W/cm³ provoque une différence ΔT de l'ordre de 25°C pour 0,1 mm de profondeur des sondes.

Nous avons donc placé nos sondes directement à la surface (Cas 2), c'est l'utilité de l'adhésif double face.



Cas 1 Cas 2

Fig. 2.6.

De telles sondes émergent dans l'écoulement ; le fil doit donc être suffisamment petit pour ne pas former de rugosité.

En régime laminaire, à des vitesses de l'ordre de 10 cm/s, le nombre de Reynolds rapporté à la rugosité est de 10, avec du fil de 0,1 mm. Il n'y a donc pas [2] de rugosité notable. En turbulent, nous trouverons des vitesses de frottement de l'ordre de 1,5 cm/s, soit un Reynolds de la rugosité sur U_f de 1,5 cm/s. On admettra, avec Nikuradse [3] que jusqu'à $\frac{U_f \varepsilon}{\nu} = 5$ la rugosité n'a pas d'effets notables sur la sous-couche laminaire.

Les sondes sont enroulées le plus régulièrement possible afin d'intégrer la température sur la surface d'un élément. En outre, plus la sonde est répartie sur une grande longueur, plus l'influence d'éventuels enfoncements de la sonde dans son support s'amoindrit.

2.3b. La densité de flux ϕ à la surface du modèle est déduite de la puissance électrique fournie au bobinage de constantan : $P = V^2/r$ où r est la résistance électrique de l'élément chauffant. La densité de flux est alors :

$$\phi = \frac{V^2}{rS} \qquad (2.3.)$$

où S est la surface effective de chauffage.

En fait, chaque élément est relié à l'alimentation à travers des fils de liaison dont on ne peut négliger la résistance r'. Nous mesurons donc en fait une tension U aux bornes de r+r'. Nous avons mesuré, de la même manière que pour R, le coefficient de température de r. Il est de 2.10^{-4} $°C^{-1}$. r est donc connu et constant pour chaque élément. On déduit donc ϕ de la mesure :

$$\phi = \frac{rU^2}{(r+r')^2 S} \qquad (2.4.)$$

S est calculé d'après les dimensions de l'élément. Nous supposons implicitement, en écrivant (2.3.) et (2.4.) que *toute* la chaleur dégagée par effet joule dans r est transmise au fluide. La validité de cette hypothèse est examinée en annexe 1.

Les résistances r sont alimentées en courant alternatif. La variation de U est assurée par un dispositif thyristorisé à décalage de phase : la conduction d'un thyristor placé en série avec l'élément chauffant est déclenchée à un temps t_c postérieur au début de l'alternance. Le courant a donc une forme représentée fig. 2.7.

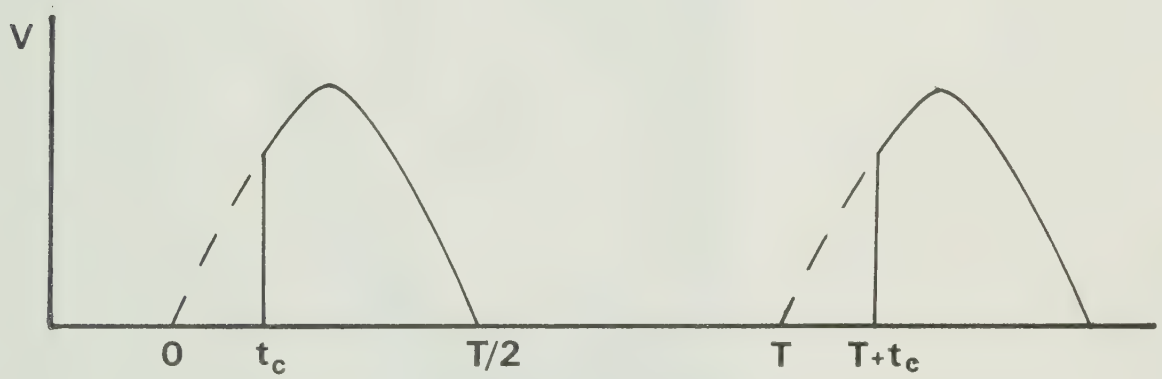
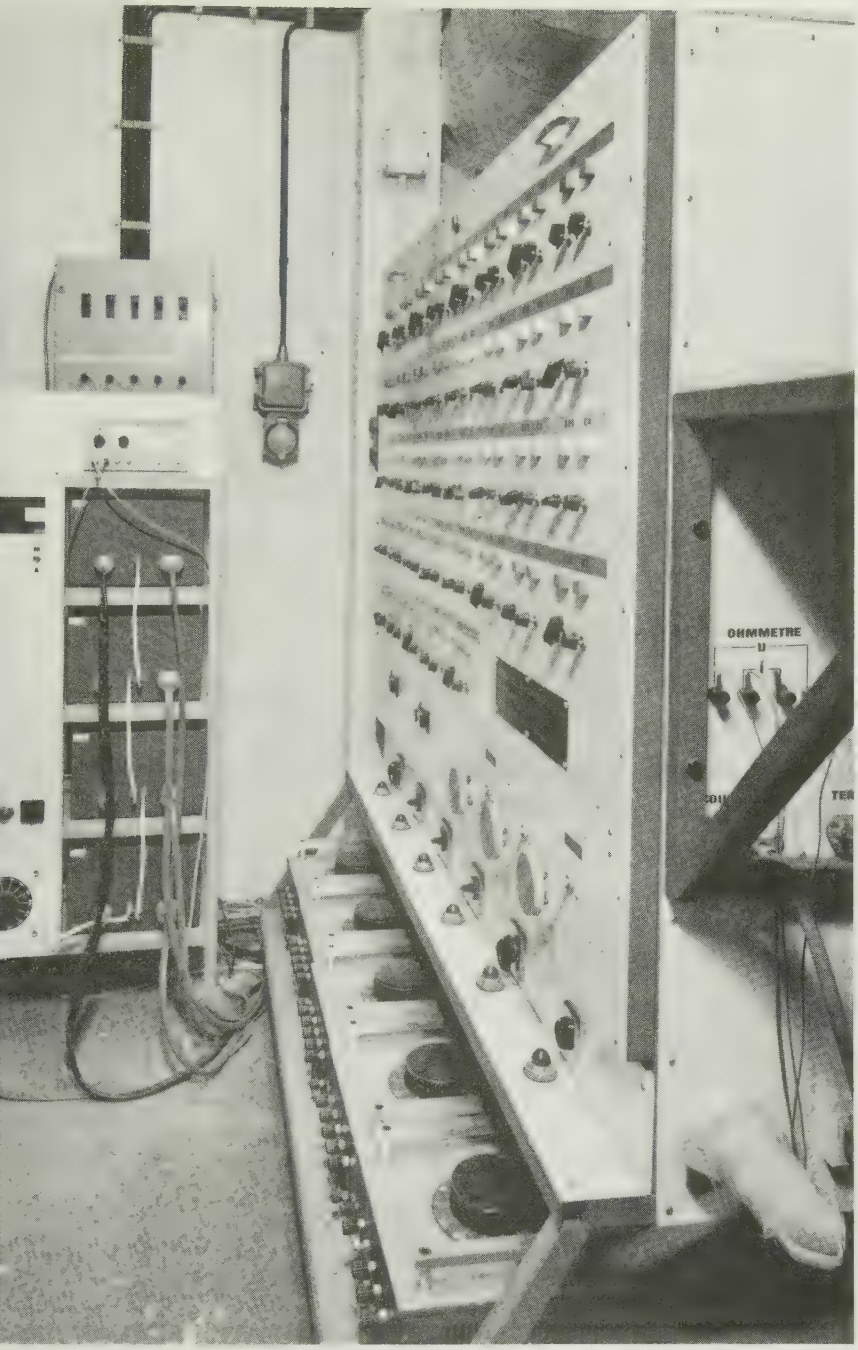


Fig. 2.7. : La forme du courant de chauffage

La variation de t_c entraîne donc une variation de la tension efficace V. t_c, donc le chauffage, est réglé à l'aide de deux potentiomètres P_1 et P_2 (réglages fins et grossiers).

V n'étant pas sinusoïdale, il faut la mesurer avec un voltmètre efficace. Nous avons utilisé un voltmètre DISA RMS 55 D35. Un voltmètre électronique Ferrisol A 206 donne la valeur moyenne.

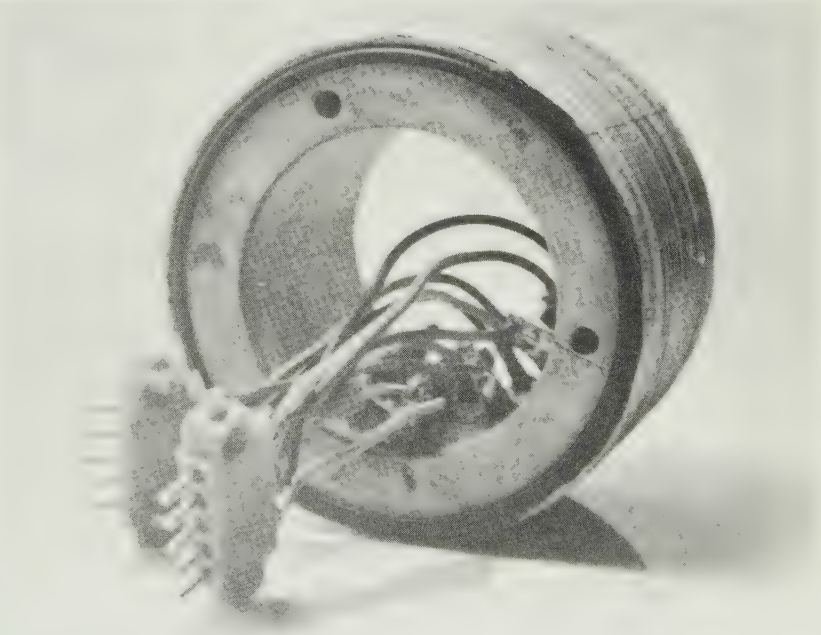


A droite,

Armoire regroupant les commandes de chauffage et les commutations des instruments de mesure.

A gauche,

Electronique de commande de chauffage et mesure de la tension appliquée aux éléments.



Un bloc supportant 4 éléments de chauffage.

Photos n° 3 et 4

2.3c. La simulation est effectuée par le processus itératif suivant :

Pour chaque élément :

- Nous mesurons la résistance $R(T_w)$ de la sonde.

- Cette valeur, introduite avec R_0 dans une petite calculatrice (Olivetti P101) nous donne : T_w, θ_w (les différents paramètres : T_r, K, T_e sont introduits dans la calculatrice au début de chaque manipulation), ainsi que le U^2_{eff} qu'il faudrait aux bornes de l'élément pour que (1.17.) soit réalisé.

- Nous mesurons alors U^2 réellement appliqué et, si le chauffage ne correspond pas à la valeur précédemment trouvée, on le modifie et on recommence le cycle jusqu'à ce que 1.17. soit satisfaite.

2.3d. Le modèle comporte 36 éléments. (Ils ne seront pas toujours tous utilisés dans les manipulations décrites ici). Il n'est pas question de disposer de 36 ohmètres ni de 72 voltmètres. Nous avons donc construit un système de commutation destiné à utiliser l'ohmètre et les voltmètres sur chacun des éléments.

Ce système (fig. 2.8.) comporte deux circuits indépendants (Ohms et Volts), de 37 voies chacun. La commutation se produit en deux temps : deux commutateurs de trois touches, l'un pour le circuit résistance, l'autre pour le circuit tension, aiguillent les appareils sur trois commutateurs rotatifs (symbolisés par des couleurs : rouge, jaune, bleu). Les éléments sont répartis entre ces trois commutateurs.

La position de chaque commutation est matérialisée par des voyants lumineux. Tous ces circuits sont rassemblés dans une armoire. Sur la face avant de cette armoire, nous trouvons pour chaque voie, en plus des deux voyants cités précédemment, les deux potentiomètres P_1 et P_2.

La fig. 2.8. résume le schéma d'ensemble des circuits de mesure et de chauffage. L'énergie est fournie par cinq alternostats C_1 à C_5. Chaque élément chauffant est branché entre un curseur C_y d'alternostat et une anode A_x de thyristor. Le commutateur à touche des tensions commute à la fois les voltmètres et un oscilloscope destiné à observer la forme du courant : si un défaut d'isolation se manifeste, on constate des distorsions par rapport à la forme de la figure (2.7.).

Nous donnons enfin, à titre documentaire, la répartition des éléments et leurs dimensions :

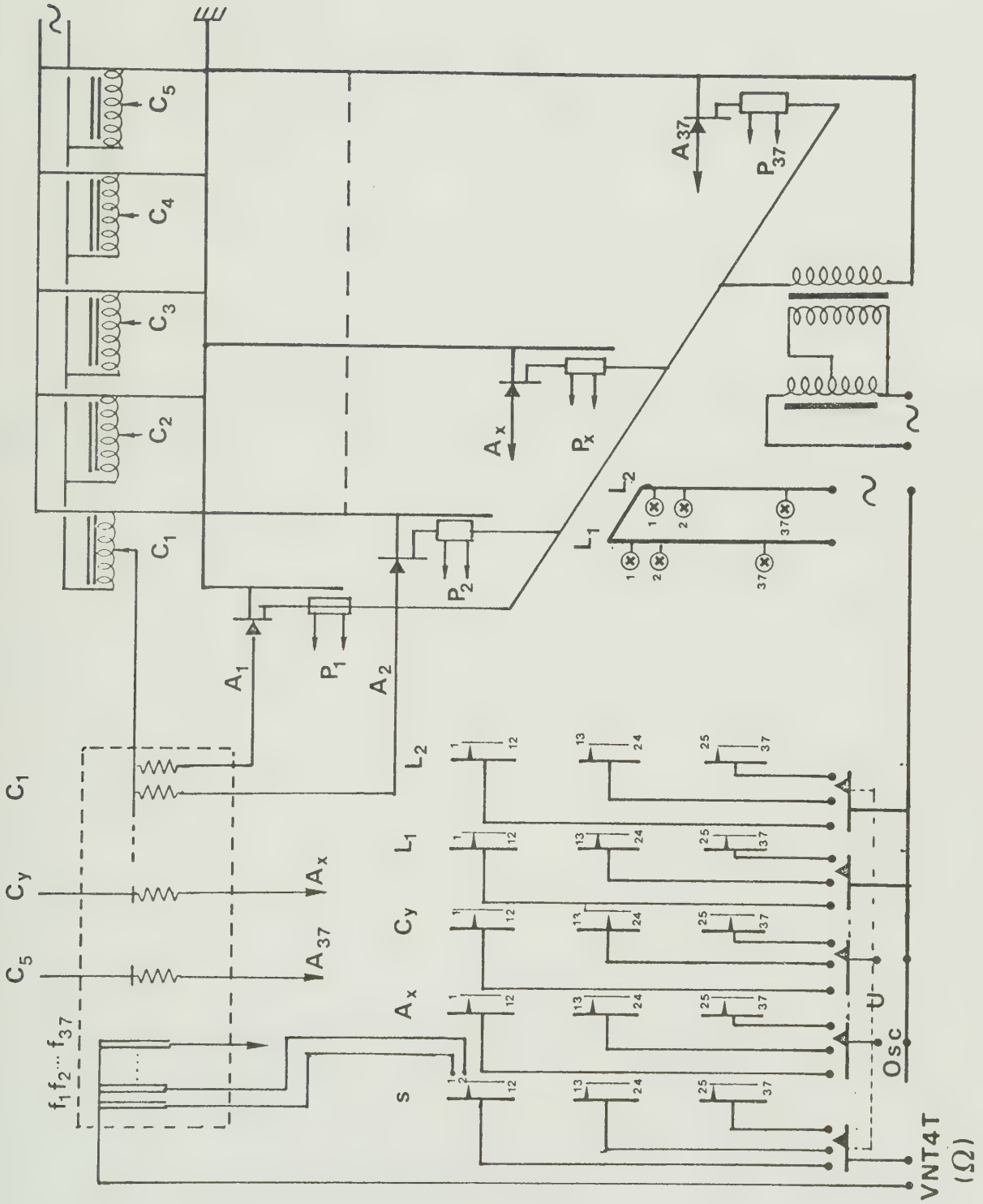


Fig. 2.8. : Le système de commutations et de mesures

Alternostat n° (C_y)	1	2			3		4			5		
Bloc n° 1	1	2		3	3	4	4	5	6	6	7	8
Elément n°	1→7	8→10	11→13	14	15→18	19→21	22	23→26	27→29	30	31→34	35→36
Grandeur (Δx)	5 mm		8 mm			10 mm						

Cette répartition peut paraître curieuse : elle s'est imposée à la construction du modèle (principalement en fonction de la capacité des connecteurs Souriau utilisés.

Chapitre 3

Les corrections

dues aux propriétés du fluide

et a la symétrie axiale

Nous avons, au chapitre 1, présenté l'analogie thermique en écrivant les équations de la couche limite pour un fluide à propriétés constantes. Nous utilisons un fluide dont les propriétés dépendent de la température. Il faut donc établir une correction qui généralise les résultats expérimentaux au cas le plus général d'un "fluide simulant" à propriétés constantes.

D'autre part, l'approche théorique du chapitre 5 fait appel à des résultats fondamentaux valables pour une géométrie plane. Nous devons donc examiner l'influence sur la validité des expressions utilisées dans le cas d'un cylindre axial. C'est l'objet du paragraphe 2.2.

3.1. L'INFLUENCE DE LA VARIATION DES PROPRIETES PHYSIQUES AVEC LA TEMPERATURE

Les propriétés d'un liquide les plus sensibles à la température sont la viscosité, μ, et la conductibilité thermique λ (fig. 3.1.). Donc le nombre de Prandtl, Pr, peut varier notablement. Nous constatons plus rarement de telles variations du nombre de Schmidt, Sc, avec la concentration. Il faut donc, pour qu'une simulation soit valable, que l'influence de la variation de Pr avec T sur la répartition des flux soit faible. On pourra la réduire alors à de simples corrections sur les résultats de nos simulations.

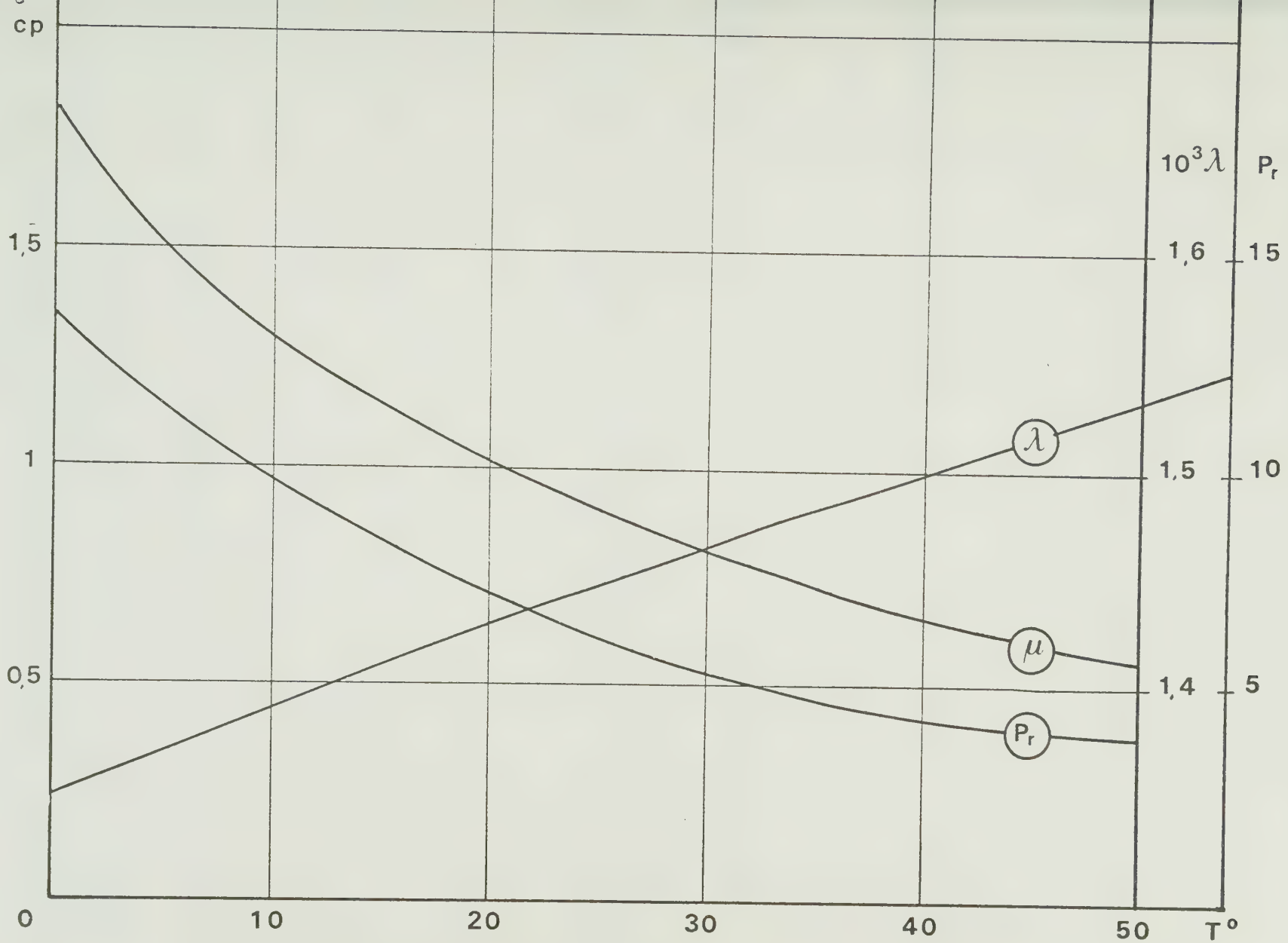


Fig. 3.1. : Variation des propriétés physiques de l'eau
avec la température

Pour établir ces corrections, nous considérerons successivement les cas de régimes d'écoulement laminaires et turbulents. Toutefois, tant au chapitre 5 qu'au chapitre 7, nous utiliserons le principe de superposition. Nous pouvons donc réduire notre étude à la variation du transfert à force constante.

3.1a. Régime laminaire

Pour un transfert thermique sur une plaque plane, la relation entre le flux et la force $T_w - T_e$ peut s'exprimer par :

$$Nu = \theta_{cst} \, R_x^{1/2} \qquad (3.1.)$$

Nu est le nombre de Nusselt égal à $\phi x/\lambda(T_w - T_e)$, et

$$\theta_{cst} = 0{,}332 \, Pr^{1/3} \qquad (3.2.)$$

Nous affecterons de l'indice cst les coefficients se rapportant à un transfert à propriétés constantes.

C'est le résultat classique de Polhausen [3] lorsque les couches limites thermiques et dynamiques ont la même origine et que les propriétés physiques du fluide ne varient pas avec T. Lorsque cette dernière condition n'est plus remplie, nous conserverons la même forme :

$$Nu = \theta \, R_x^{1/2} \qquad (3.3.)$$

Nous appellerons :

$$\sigma = \frac{\theta}{\theta_{cst}} \qquad (3.4.)$$

Pour une évaluation rapide, on peut conserver θ sous la forme (1.2.) en évaluant Pr à une température de référence comprise entre T_e et T_w |2|.

Nous avons préféré chercher une forme de σ dépendant explicitement de T_w et de T_e et nous avons utilisé pour cela les résultats de calculs effectués par Poots et Ragett [35][36]. Ces auteurs donnent des valeurs de θ pour différents T_w et T_e, dans le cas de l'eau. Calculant d'après leurs résultats, les différentes

valeurs de σ, nous avons trouvé que la formule suivante donne une bonne approximation de la variation de σ avec T_e et T_w :

$$10^3(\sigma-1) = (4,1 - 0,052\ T_e)(T_w-T_e) \qquad (3.5.)$$

La figure 3.2. compare un réseau de droites (3.5.) et quelques points extraits d'un tableau donné dans [35].

La plupart de nos manipulations sont effectuées pour T_w-T_e de l'ordre de 10°C et T_e de l'ordre de 20°C. On voit donc que $\sigma-1$ reste faible. On peut donc envisager une correction qui peut s'effectuer de deux manières :

1) Soit introduire θ, dans l'expression du flux, sous la forme d'une fonction de T_w et T_e, et résoudre les équations du chapitre 5 avec des nombres de Nusselt de la forme :

$$Nu = \sigma(T_w-T_r,\ T_r)\ \theta_{cst}\ R_x^{1/2} \qquad (3.6.)$$

2) Soit résoudre les équations que nous trouverons au chapitre 5 sans modifier θ_{cst}, et faire porter la correction sur le θ contenu dans la variable z que nous avons définie au chapitre 1.

En raison de la faiblesse de la correction, c'est cette dernière méthode que nous adopterons. Elle est en effet beaucoup plus simple et surtout, elle généralise les simulations au cas d'un fluide à propriétés constantes.

3.1b. Cas d'un écoulement turbulent

Dans un article récent, Lafay [37] présente une revue des travaux concernant l'influence sur le coefficient de frottement de la variation de la viscosité de l'eau avec la température. Notre traitement théorique, au chapitre 7, associera étroitement le transfert thermique au coefficient de frottement, C_f. Nous écrirons donc, comme dans toute analogie [2] :

$$\frac{S_t}{S_{t_{cst}}} = \frac{C_f}{C_{f_{cst}}} = \sigma_{turb.} \qquad (3.7.)$$

$\sigma_{turb.}$ est le coefficient correspondant à σ en turbulent.

$\sigma_{turb.}$ peut être évalué de différentes manières.

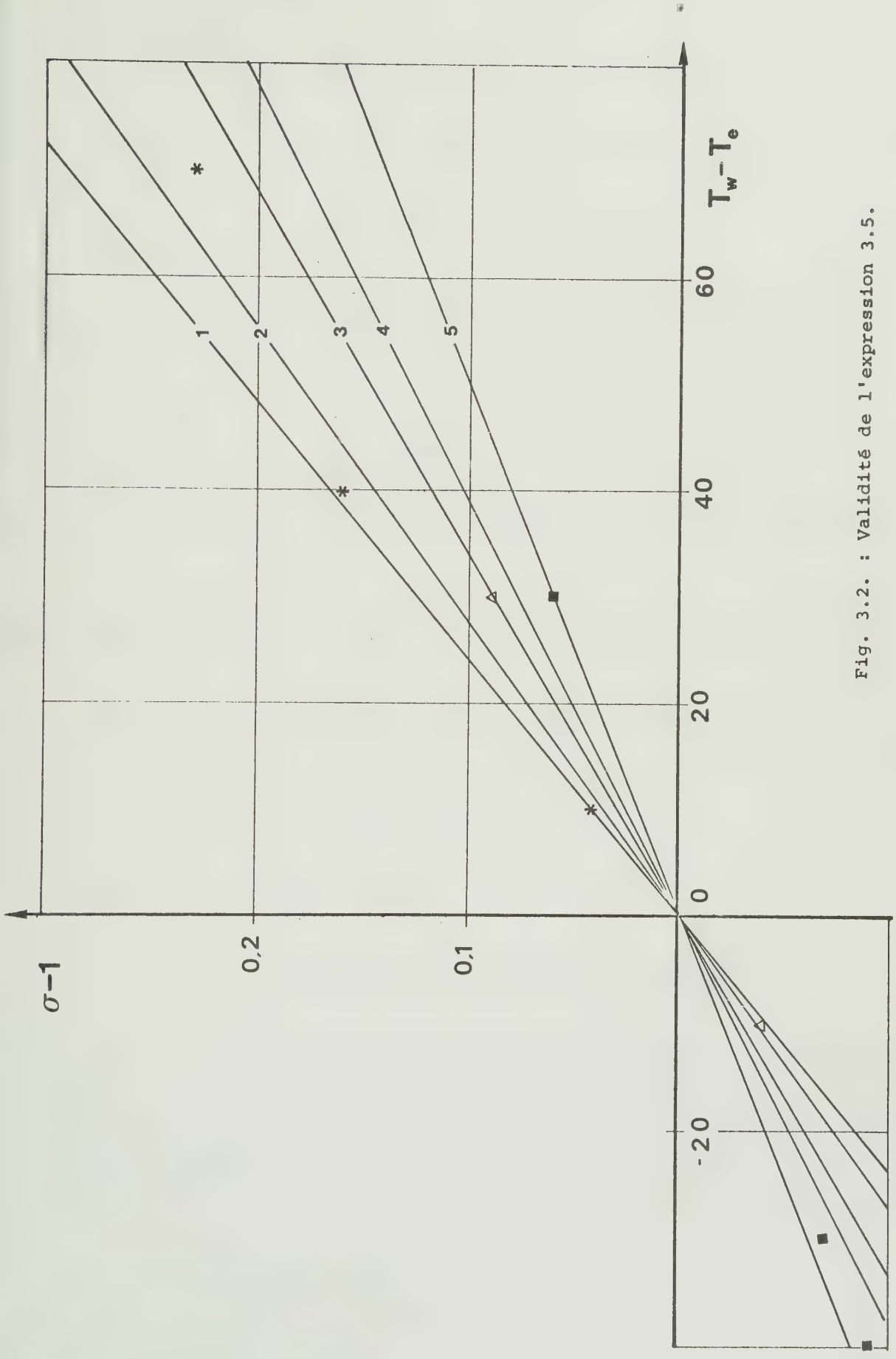


Fig. 3.2. : Validité de l'expression 3.5.

Lafay a synthétisé différents résultats en écrivant :

$$\sigma_{turb.} = 1-0,5(1+X)^{F(R_x)} \log(1+X) \qquad (3.8a)$$

$$X = \left(\frac{\mu_e}{\mu_w} - 1\right)\left(\frac{\mu_e}{\mu_w}\right)^{0,17} \qquad (3.8b')$$

$$F(R_x) = 0,17-2.10^{-6} R_x + \frac{1800}{R_x} \qquad (3.8c')$$

Pour une correction, une précision moindre est acceptable. Nous avons utilisé la formule :

$$\sigma_{turb.} = \left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right)^n \qquad (3.9.)$$

n dépend en général des conditions de température. n = 0,25 est une valeur communément admise.

Comme en 3.1a, nous ferons porter $\sigma_{turb.}$ sur une variable réduite. Dans le cas présent, $\sigma_{turb.}$ portant sur le C_f, nous en affecterons la variable x^+ (voir chapitre 7).

Précisons enfin que, pour une température d'écoulement extérieure de 20°C et un écart paroi-extérieur de 10°C, on aurait, en laminaire une correction de 3,1 % et en turbulent de 5,4 %.

3.2. L'INFLUENCE DE LA COURBURE TRANSVERSALE

Pour résoudre le problème d'un transfert autour d'un cylindre, il apparaît logique de réécrire les équations régissant la convection en coordonnées cylindriques, et résoudre le système ainsi obtenu. Toutefois, appliquant un principe de superposition dans notre traitement théorique, il est aussi logique de considérer que c'est le coefficient de frottement qui est perturbé par la courbure, et d'introduire cette modification dans les calculs ultérieurs, ce que nous ferons au chapitre 5.

Nous allons donc chercher des coefficients $\bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}_{turb.}$ qui permettent de réduire le coefficient de frottement C_f avec courbure transverse du coefficient $C_{f_{pl}}$ obtenu sur une plaque plane :

$$en\ laminaire \quad C_f = \bar{\sigma}\ C_{f_{pl}} \tag{3.10a}$$

$$en\ turbulent \quad C_f = \bar{\sigma}_{turb.}\ C_{f_{pl}} \tag{3.10b}$$

C'est en fait cette influence sur le C_f qui a été la plus étudiée dans la littérature.

Paradoxalement, la couche limite turbulente axisymmétrique semble avoir inspiré plus de publications que la couche laminaire.

Jakob et Dow [71] supposent une similitude des profils de vitesse et de température, sous la forme admise par Polhausen [3] en laminaire et en 1/7 pour le turbulent. Ils supposent de plus que l'épaisseur δ n'est pas affectée par la courbure. Ils trouvent :

$$\bar{\sigma} = 1 + \frac{25\delta}{284r} \quad en\ laminaire \tag{3.11a}$$

$$\sigma_{turb.} = 1 + 0{,}3\ \frac{\delta}{r} \quad en\ turbulent \tag{3.11b}$$

Eckert [72] suppose que la relation entre le coefficient de frottement et l'épaisseur δ de la couche limite ne change pas avec la géométrie cylindrique. Il propose, en régime turbulent

$$\bar{\sigma}_{turb.} = \left(\frac{\delta_{pl}}{\delta}\right)^{0,25} \tag{3.12a}$$

avec

$$\frac{\delta}{\delta_{pl}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{3r}\right)^{4/5}} \tag{3.12b}$$

Sparrow, Eckert, Minkowycz [73] supposent une variation de la contrainte tangentielle dans la couche limite donnant un profil logarithmique de vitesses. Utilisant l'expression donnée par Deissler [7] pour la diffusivité turbulente, ils présentent leurs résultats sous formes de courbes.

La première étude théorique en régime laminaire est celle de Seban et Bond [68]. Nous aurons à la détailler plus loin.

Glauert et Ligthill ont étudié la couche laminaire pour les grandes épaisseurs. Leur étude recoupe celle de Seban et Bond pour une valeur du paramètre $\frac{\nu}{U_e r^2} = 0,04$ [70].

Du point de vue expérimental, Richmond [81] développe son étude en laminaire et turbulent dans des courants d'air. Il est conduit dans son étude théorique par l'idée que les lignes de courant moyennes sont telles que, en turbulent : U/U_f = Cte (Streamline hypothesis). Yu [80], en turbulent, a trouvé, dans l'air, des profils de vitesses identiques à ceux développés au-dessus d'une plaque plane.

Rao [74] montre que l'hypothèse de Richmond n'est valable que pour $\frac{y}{a} << 1$, pour de grandes épaisseurs de la couche limite. Il introduit un profil universel de la forme :

$$y^+ < 5 \qquad u^+ = a^+ \, Ln \, \frac{r}{a} \tag{3.13a}$$

$$y^+ > 30 \qquad u^+ = \frac{1}{K} \, Ln\left(a^+ \, Ln \, \frac{r}{a}\right) + B \tag{3.13b}$$

Dans leur étude expérimentale, toujours en turbulent, Rao et Keshavan [75] précisent la valeur de K en fonction du nombre de Reynolds ramené au rayon du cylindre, et la variation de B :

$$B = \frac{0,1 \, R_r - r^+}{0,01016 \, R_r - 4} \tag{3.14.}$$

Remarquons, que pour des épaisseurs de la couche limite allant jusqu'au rayon, les deux présentations de Rao et de Yu pour le profil de vitesses sont équivalentes.

White [76] postulant la loi de paroi de Rao déduit des calculs le coefficient de frottement en turbulent qu'il confronte à diverses valeurs expérimentales.

White, Lessman, Christoph [77] se posent le même problème en présence de gradients de pressions pour différents nombres de Mach, en compressible.

Cebeci [78] [79] résout le problème en laminaire et en turbulent par un calcul aux différences finies. Il emploie dans ses calculs des expressions de la diffusion turbulente (Van Driest) valables pour la plaque plane.

Enfin, Eichhorn, Eckert et Anderson [82] étudient le transfert thermique autour d'un cylindre : ils utilisent les résultats de Seban en laminaire et négligent la courbure en turbulent (d'après Eckert).

De tous ces travaux, il ressort que l'effet essentiel de la courbure est de diminuer la croissance des épaisseurs des couches limites dynamiques et de diffusion. Par conséquent le coefficient de frottement local est plus élevé que pour une plaque plane. En règle générale, plus la courbure est forte, plus le transfert est accéléré ; on comprend aisément ce phénomène en constatant que, pour effectuer le bilan local des transferts, il ne faut plus prendre un volume élémentaire cubique, mais un fragment de couronne.

Tous les travaux cités ci-dessus utilisent des hypothèses diverses. Nous avons comparé les résultats qu'ils donnent dans nos conditions expérimentales. Aussi nous reproduisons dans le tableau 3.1. les résultats obtenus pour le rapport des couches limites, quand on peut le calculer et pour $\bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}_{turb.}$, en suivant ces différentes méthodes. Sauf pour Seban et Bond, et Sparrow, $\bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}_{turb.}$ ont été calculés à partir du rapport des coefficients de frottement.

Il apparaît tout d'abord que les résultats sont en accord, à l'exception des valeurs données par Jakob et Dow. En raison des hypothèses particulièrement simplificatrices adoptées par ces auteurs, ce fait est peu surprenant.

En régime turbulent, la valeur donnée pour le C_f par Sparrow et al est légèrement supérieure. White a déjà signalé que ces auteurs trouvaient en général des valeurs supérieures aux résultats expérimentaux [76].

Nous pourrons donc aussi bien utiliser la forme analytique d'Eckert que les courbes fournies par Yu pour l'estimation de $\bar{\sigma}_{turb.}$.

Pour $\bar{\sigma}$, en laminaire, nous utiliserons le calcul de Seban et Bond [68], qui, suite à une erreur sur la définition d'une épaisseur de quantité de mouvement, a été corrigé par Kelly [69].

Nous rappellerons ici simplement leurs résultats.

Ils introduisent une variable η :

$$\eta = \frac{\sqrt{U_e}}{\sqrt{\nu x}} \left| y\left(1 + \frac{y}{2r}\right) \right| = \frac{y^*}{x} \sqrt{R_x} \qquad (3.15.)$$

C'est la variable de similitude introduite par Blasius [1] où y est remplacé par une variable y^*. Remarquons le développement de "l'hypothèse des lignes de courant" par Richmond conduit à la même longueur y^*.

Nous n'écrirons pas ici la forme générale du système d'équations. Nous dirons simplement que l'influence de la courbure peut être chiffrée par l'apparition du paramètre $\xi = \frac{4}{r}\sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$.

Les résultats présentés dans ce tableau ont été obtenus dans les deux cas suivants :

1) Cas laminaire : U_e = 5 cm/s ; x = 30 cm

2) Cas turbulent : U_e = 50 cm/s ; x = 100 cm.

AUTEURS	$\frac{\delta}{\delta_{pl}}$	Cas laminaire	Cas turbulent	
		$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}_{turb.}$	
JAKOB - DOW 1946	1 par hypothèse	1,03	1,227	Calcul
SEBAN - BOND KELLY 1951 - 1954		Stanton : 1,14		Calcul
ECKERT 1952	0,83		1,048	Calcul
SPARROW ECKERT MINKOWYCZ 1963			C_f : 1,1 Stanton : 1,05	Calcul
YU 1958	0,85		1,036	Expérimental
WHITE 1972			1,04	
CEBECI 1970			1,04	Calcul

Tableau 3.1.

Le profil de vitesse devient alors :

$$\frac{U}{U_e} = f_0'(\eta) + \xi f_1'(\eta) - \xi^2 f_2'(\eta) \qquad (3.16)$$

$f_0'(\eta)$ est la fonction de Blasius [1].

Ainsi le profil (3.16.) apparaît comme un profil de "plaque plane" perturbé par des fonctions f_1' ... f_n'. Cette perturbation est pondérée par le paramètre ξ. Plus r est petit, plus l'importance de ξ est grande.

Nous représentons (fig. 3.3.) les fonctions f_0', et f_1' et f_2' telles que les ont calculées Seban et Bond.

$\bar{\sigma}$, d'après les mêmes auteurs, prend pour le coefficient de frottement, la valeur :

$$\bar{\sigma} = \frac{C_f}{C_{f_{pl}}} = 1 + 0{,}525\ \xi - 0{,}120\ \xi^2 \qquad (3.17.)$$

Dans le cas du nombre de Stanton, nous avons :

$$\frac{St}{St_{pl}} = \frac{C_f}{C_{f_{pl}}} \times \frac{1+0{,}575\ \xi}{1+0{,}535\ \xi} \sim \bar{\sigma} \qquad (3.18.)$$

Nous évaluerons donc $\bar{\sigma}$ par (3.17.).

Nous avons donc, dans ce chapitre, calculé deux sortes de coefficients, $\bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}$, que nous avons appelés corrections.

Toutefois, il est important de remarquer que ces deux coefficients répondent à des nécessités totalement différentes.

Le premier nous permet de généraliser des manipulations effectuées avec des propriétés physiques dépendant de la température au cas général d'un fluide à propriétés physiques constantes. C'est donc réellement une correction, et il est important de constater qu'il ne diffère de un qu'à quelques pour cent près.

Le second nous permettra, dans le cas d'une géométrie axisymmétrique, d'utiliser des résultats généralement admis dans le cas d'une plaque plane. C'est donc en fait un artifice de calcul. Nous justifions l'emploi particulier que nous en faisons dans le présent mémoire à l'annexe 3 ($\bar{\sigma}$ peut être assez différent de un).

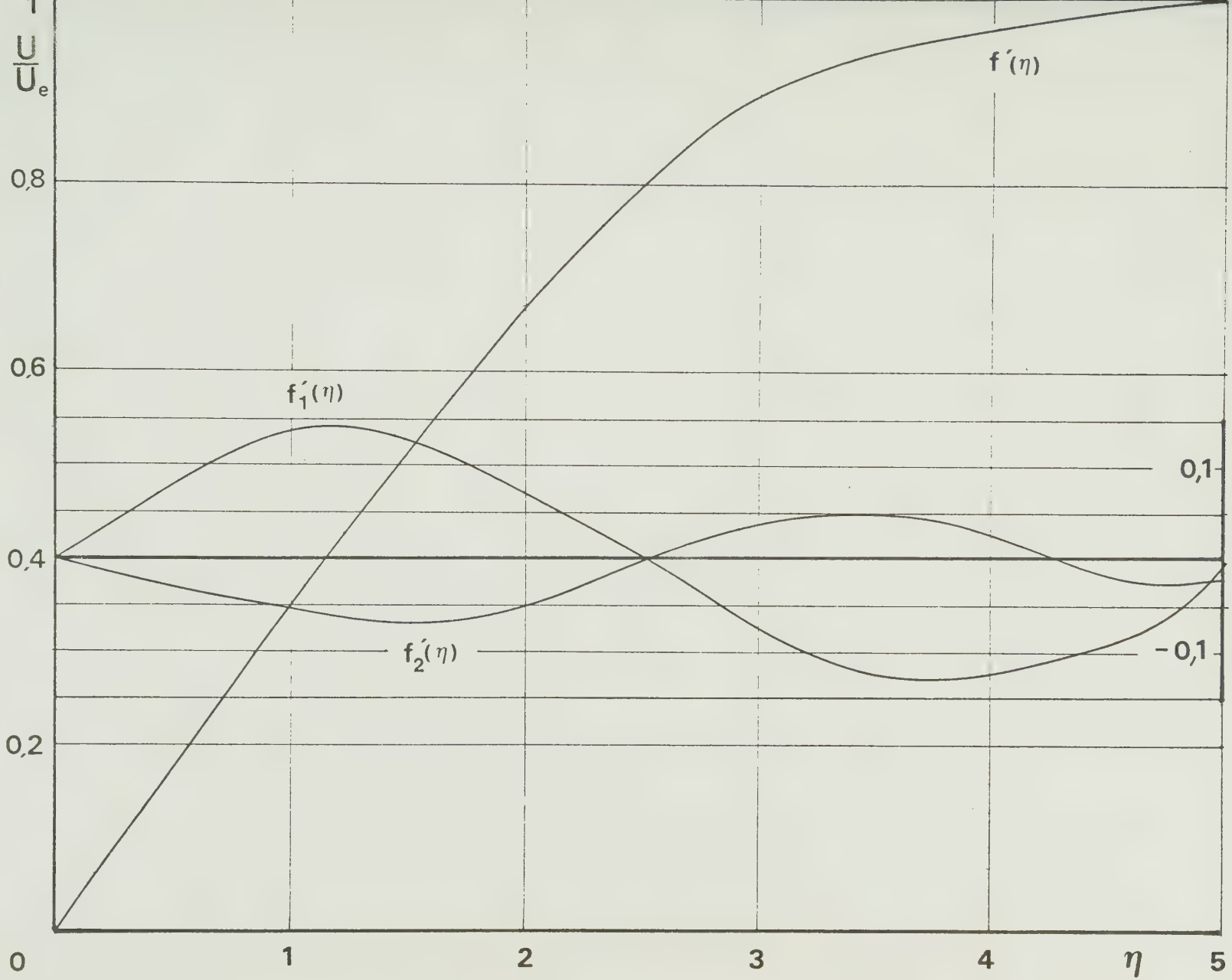


Fig. 3.3. : Les fonctions f_1' et f_2'

Le paragraphe 3.1. justifie donc l'emploi de l'eau comme fluide simulateur. 3.2. nous fournit un cadre pour l'étude dynamique de la couche limite. Nous pouvons maintenant présenter les résultats de l'étude expérimentale.

Chapitre 4

L'étude expérimentale

en régime laminaire

Le chapitre 3 nous a montré que le champ de vitesses autour d'un cylindre axial diffère de la couche limite développée par une plaque plane, tant du point de vue des profils que de celui des coefficients de transfert.

Nous confronterons au chapitre 5 les profils de concentration pariétaux obtenus par analogie thermique à ceux déduits d'un calcul. Il faut pour effectuer ce calcul, définir le régime hydrodynamique. Nous opérons avec un nombre de Prandtl de l'ordre de 7, et nous commençons la "simulation" dans une zone où la couche limite dynamique est déjà bien développée : la couche limite thermique n'occupera donc qu'une faible hauteur dans la couche dynamique, et on peut identifier le profil de vitesses "utile", c'est-à-dire participant au transfert convectif, à un segment de droite dont la pente est directement déduite de la valeur de la contrainte pariétale. De plus, notre calcul s'appuiera essentiellement sur les valeurs des coefficients de transfert pariétaux. C'est pourquoi l'objectif essentiel de l'étude dynamique sera la connaissance du frottement, et en particulier la recherche d'un coefficient de frottement C_f dont l'évolution soit comparable à celui de la théorie de Seban : dans ce cas en effet on légitime l'emploi des coefficients $\bar{\sigma}$ du chapitre 3.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présenterons des résultats de simulations thermiques et analyserons qualitativement l'influence des divers paramètres.

4.1. L'ETUDE DYNAMIQUE

4.1a. La méthode de mesures

Nous avons précisé au chapitre 2 que nous n'avions pas, en laminaire, utilisé des vitesses à l'infini supérieures à 10 cm/s. Dans cette gamme, les méthodes habituelles de mesure de vitesse sont difficilement utilisables.

- La mesure au tube de Pitot, d'une vitesse de l'ordre de 1 cm/s dans l'eau donne une pression différentielle de $\Delta H = \frac{u^2}{2g} \sim 5.10^{-4}$ cm d'eau ; la mesure de telles pressions est délicate.

- Le fil chaud est difficilement utilisable à des vitesses inférieures à 10 cm/s [85].

- Nous avons tout d'abord essayé d'utiliser un prototype de thermoconductimètre Calvet [88] comme anémomètre basses vitesses. Cet appareil fournit des impulsions à une sonde placée dans le fluide. La réponse de la sonde fournit un signal dépendant de la vitesse et de la température du fluide (suivant un principe analogue à celui du thermoanémomètre Calvet [25] qui est utilisé pour la mesure des vitesses dans l'air). L'application d'un tel appareil dans des courants d'eau a permis de réaliser des étalonnages reproductibles [88]. Les capteurs utilisés étaient des petites thermistances de 0,3 mm de diamètre. Bien que de petite taille, elles se sont révélées d'un trop grand volume pour l'exploration de couches limites.

- L'avènement récent du laser a permis le développement d'une nouvelle technique de mesure de vitesses dans les fluides : l'anémométrie Laser-Doppler. Cette méthode de mesure présente principalement deux avantages : elle est absolue, donc ne demande pas d'étalonnage. Elle permet de mesurer des vitesses très faibles (à partir d'une fraction de mm/s) et n'est pas sujette aux dérives.

Nous avons utilisé pour l'exploration des champs de vitesses laminaires un anémomètre Laser-Doppler étudié et construit au laboratoire par Gouesbet [89]. Nous avons, en collaboration avec lui, mesuré des profils de vitesses en quatre points répartis sur la partie "catalysante" du cylindre.

Rappelons rapidement le principe de l'anémomètre Laser-Doppler en montage interférentiel.

On crée au point du fluide où l'on veut mesurer la vitesse, un champ d'interférences dont on connaît l'interfrange i,le fluide transporte des particules, soit naturellement, soit après qu'on les y ait introduites. On suppose de plus qu'elles se déplacent à la vitesse du fluide. En passant dans le champ d'interférences, elles diffusent la lumière qu'elles reçoivent. Cette lumière diffusée est donc modulée à une fréquence qui dépend de i, et de la vitesse de déplacement de la particule :

$$f = \frac{u}{i} \qquad (4.1.)$$

La connaissance de cette fréquence constitue une mesure de u.

Le dispositif expérimental (fig. 4.1.) est constituée comme suit :

Un laser émet un faisceau qu'un ensemble prisme-rhomboèdre sépare en deux faisceaux parallèles. Ces derniers sont focalisés par une lentille L_1 (de focale 30 cm) au point de mesure, M. Le balayage de la couche limite est assuré par un système de deux miroirs, M_1, fixe, et M_2, dont le déplacement est perpendiculaire au plan de la figure. La lumière est reprise par un miroir M_3 et focalisée sur le photomultiplicateur par la lentille L_2 (de focale 40 cm). Un diaphragme D_1 arrête les deux faisceaux directs, pour que seule la lumière diffusée atteigne le photomultiplicateur. L_2 conjugue le champ d'interférences et le diaphragme d'entrée du P.M. avec un grandissement unité. Le champ d'interférences s'inscrit dans un ellipsoïde de révolution d'axes 250 µm, 250 µm et 7500 µm, respectivement suivant x'x, y'y et z'z.

Nous ne pouvions, pour ces mesures, utiliser les hublots en altuglas plein. En effet (fig. 4.2.), vu leur forme, les rayons incidents et excidents ne sont pas parallèles. Nous avons tourné cette difficulté en utilisant des hublots de même forme, mais remplis d'eau, dont les parois minces sont construites en makrolon une matière plastique transparente qui a la propriété de se galber aisément. Ainsi, l'effet des réfractions se limite à celui de deux lames à faces parallèles de 1,5 mm d'épaisseur, l'une perpendiculaire aux faisceaux, l'autre dont l'inclinaison varie peu au cours du balayage de la couche limite : il n'y a pas d'effet de réfraction air-eau en raison de l'incidence normale, et il n'y a qu'un effet de lame à faces parallèles provoquant un décalage qu'on peut considérer comme constant, entre 2 et 3 (Cas B).

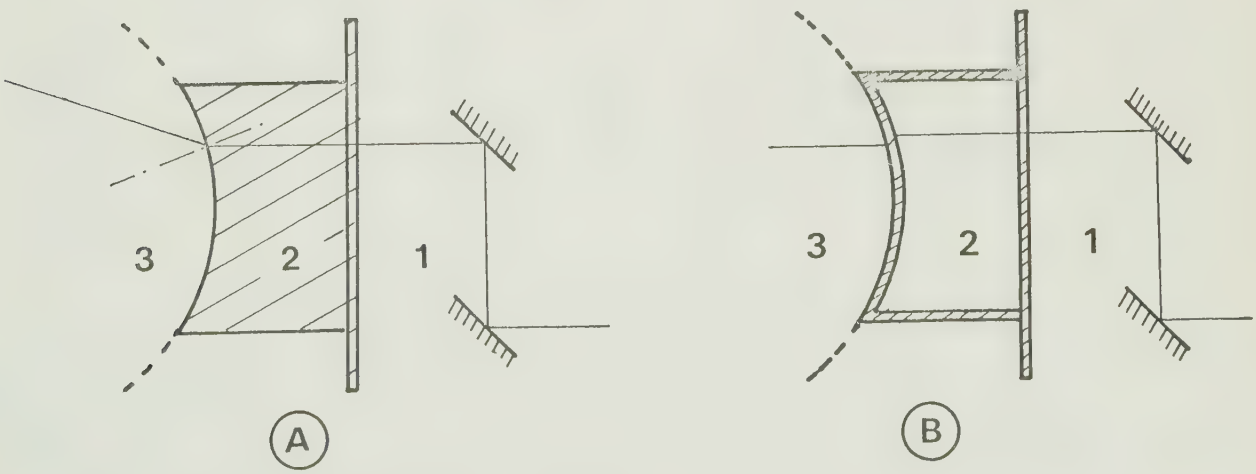


Fig. 4.2.
Cas A : 1. air, 2. plexiglas, 3. eau
Cas B : 1. air, 2. eau, 3. eau

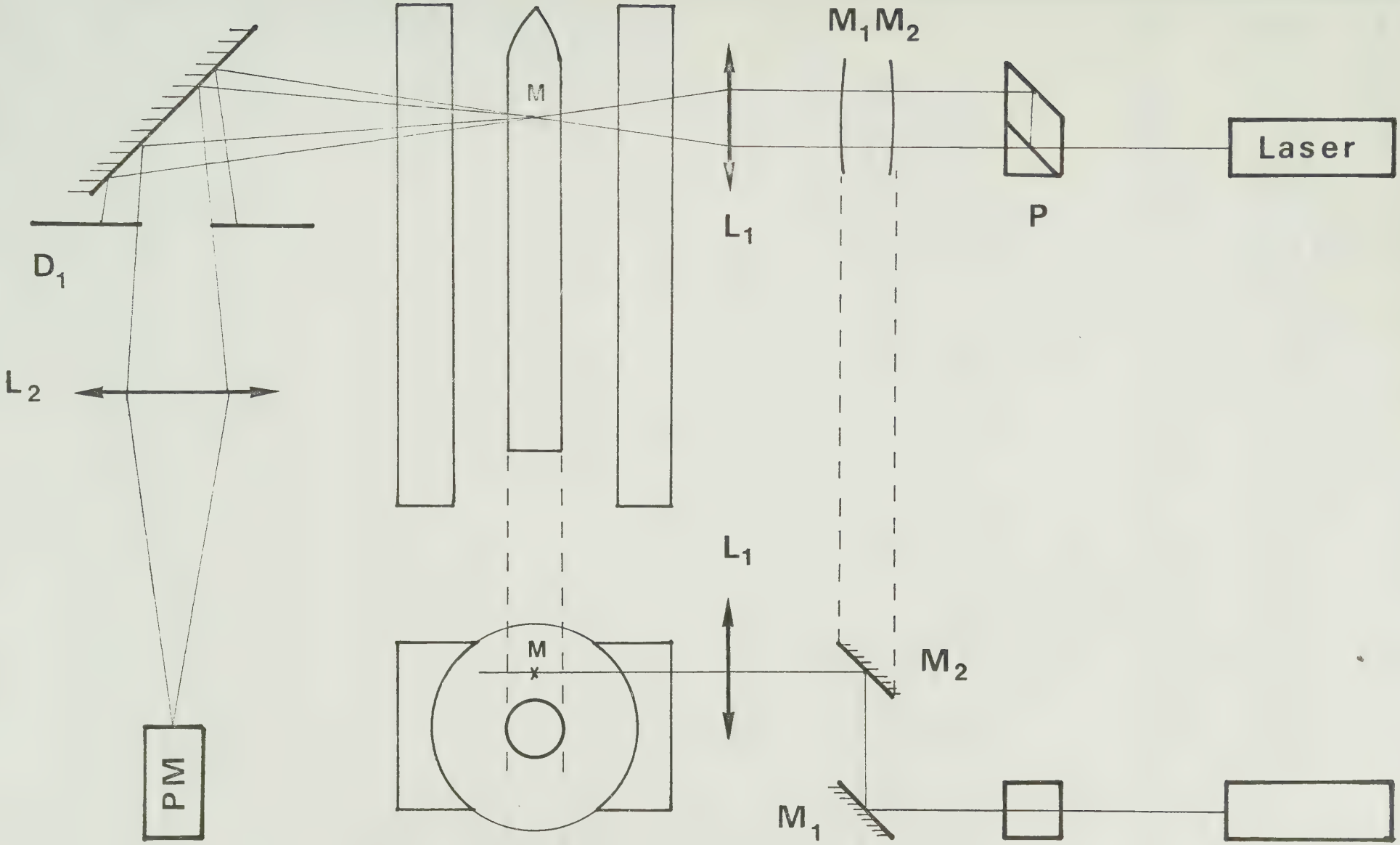


Fig. 4.1. : L'anémomètre Laser-Doppler

Ces hublots, pour des raisons de coût, n'ont pas de qualités optiques particulières.

Le signal donné par le photomultiplicateur n'a donc plus sa forme idéale : une sinusoïde, de fréquence f, enveloppée par une courbe de forme Gaussienne (provenant de la répartition d'intensité dans le faisceau laser), représentée fig. 4.3. (A).

En effet, sous l'influence d'une inégalité (ou d'un dépôt) sur le hublot, l'enveloppe se trouve déformée et l'on peut avoir un signal de la forme (B) (fig. 4.3.).

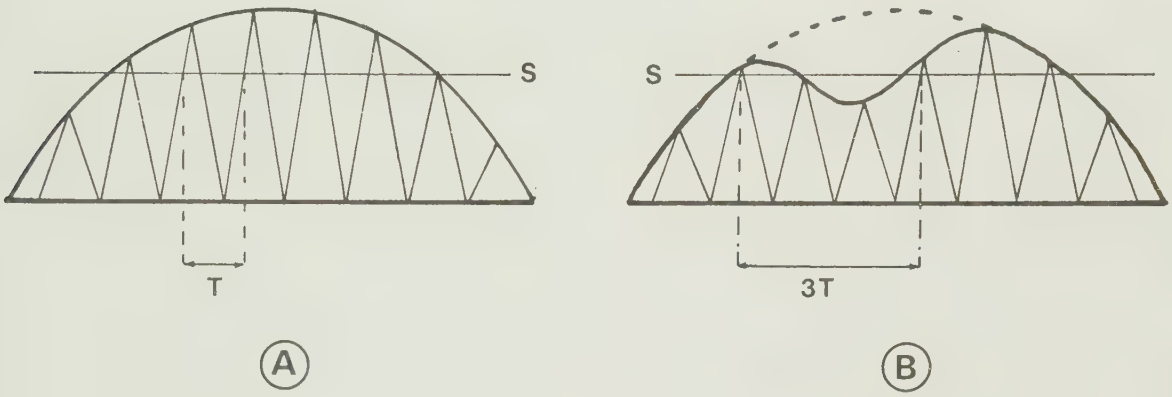


Fig. 4.3.

La mesure de f, dont nous allons tout d'abord exposer brièvement le principe, s'en trouve perturbée. Dans le cas d'un signal tel que 4.3A, la mesure de f est simple : le signal fourni par le photomultiplicateur est amplifié ; l'amplificateur, qui travaille dans une bande comprise entre 100 et 1000 Hz, déclenche un trigger, suivi d'une bascule. Chaque front de montée du trigger fait changer la bascule d'état ; il faut toutefois que le niveau du signal atteigne au moins le niveau de déclenchement S_1. Ainsi, dans un fonctionnement normal (cas A), la bascule change d'état pour deux montées sucessives du signal. La mesure de l'intervalle de temps entre ces deux basculements à l'aide d'un chronomètre Rochar nous fournit alors la période T du signal.

On voit alors que, dans le cas d'un signal déformé (4.3B), deux montées du signal successives n'atteignent pas nécessairement le niveau S_1. Dans ce cas on mesure non seulement la période T mais aussi des périodes multiples 2T, 3T ... nT. De plus, la sinusoïde étant déformée, il y a une dispersion entre les valeurs mesurées. Cette dispersion vient aussi du fait que deux particules peuvent se trouver en même temps dans le champ d'interférences. Nous avons donc traité les mesures par histogrammes en relevant, pour chaque vitesse, un grand nombre de valeurs (entre 200 et 400), et en les classant par gammes de valeur, on porte en abcisse les valeurs,

en ordonnées, leur population. L'histogramme présente alors des pics qui correspondent aux valeurs T, 2T ... nT. On en déduit facilement la vitesse u.

Les différentes valeurs pouvaient être enregistrées automatiquement. Toutefois, nous ne disposions pas de moyens d'effectuer automatiquement les histogrammes, et nous avons effectué cette dernière opération manuellement [87].

4.1b. Le but de l'étude

Le chapitre 3 nous a montré qu'en raison de l'axisymmétrie, on peut s'attendre à une déformation des profils par rapport au profil de Blasius prévisible au-dessus d'une plaque plane.

Nous nous intéressons ici à l'incidence de ces déformations sur le transfert thermique et, plus particulièrement sur le transfert pariétal. Nous savons que les corrections sur le Stanton peuvent être identifiées à celles portant sur le coefficient de frottement, ce qui prédominera dans notre étude sera la valeur de C_f.

Pour des raisons de continuité, le modèle n'est pas cylindrique dès le point de stagnation. La couche limite commence son développement sur un paraboloïde de révolution (le nez), c'est-à-dire avec une courbure longitudinale, donc, un gradient de pression négatif. La couche limite, toutefois, prend rapidement, dans sa partie cylindrique, l'aspect d'une couche développée dès son origine sur un cylindre.

Nous cherchons donc si on peut définir une origine fictive, c'est-à-dire un point de l'axe à partir duquel une couche cylindrique serait identique à la couche observée. On convient en général de remplacer les parties à courbures longitudinales par un cylindre de longueur égale à la distance curviligne du point de stagnation à la partie cylindrique. Dans le cas de notre modèle, nous avons calculé cette longueur, qui placerait l'origine fictive à 19 cm en avant du début de la partie cylindrique.

Eckert, Eichhorn et al [82] déterminent, sur un cylindre, une abcisse fictive, par la méthode classique, en évaluant les épaisseurs de quantité de mouvement, δ_2 et en traçant la droite $\delta_2^2 = f(x)$. L'intersection de cette droite et de l'axe des x est l'abcisse fictive. Ils ont pu opérer ainsi car leurs couches limites sont minces (leur profil est pratiquement un profil de Blasius). Dans le cas de couches limites relativement épaisses, les différentes épaisseurs, δ_i, sont de la forme :

$$\delta_i = A x^{-1/2} \left[1 + B\sqrt{x} + C x + \ldots\right] \qquad (4.2.)$$

De plus, nous avons constaté sur nos profils une déformation par rapport au profil théorique de Seban et Bond. Nous en verrons une explication plus loin.

Il nous a donc paru plus logique d'effectuer la détermination de l'abcisse fictive à partir du C_f, évalué d'après le gradient local de vitesse . Dans ces conditions, nous avons cherché à vérifier l'hypothèse faite précédemment, à savoir celle d'une couche limite se développant comme si le modèle était cylindrique à partir d'un point situé à 19 cm en avant de la zone chauffante. Cette manière de procéder nous a paru plus logique que la façon inverse, qui consistait à essayer de retrouver x à partir des valeurs de C_f. En effet, d'après Seban et Bond, on peut écrire :

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{\frac{U_e x}{\nu}}} \left(1+0,53\sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} + \ldots\right) \qquad (4.3.)$$

x varie donc comme $C_f^{\,2}(x)$, l'erreur relative sur x est alors double de celle sur C_f qui est basée sur l'évaluation d'une pente.

4.1c. Les résultats de l'étude dynamique

- Nous avons mesuré les profils de vitesse en quatre points répartis sur la longueur du modèle, pour différentes vitesses à l'infini. La figure 4.4. schématise la position de ces points, X_1 à X_4.

La figure 4.5. représente les profils de vitesses mesurés pour la vitesse U_e = 6 cm/s. Nous avons tracé sur chacun des profils la droite

$$\frac{u}{U_e} = y \times \frac{U_e}{\nu} \frac{C_{f\,théo.}(x)}{2} \qquad (4.4.)$$

dont le coefficient angulaire représente la pente à l'origine du profil théorique de Seban, correspondant à l'abcisse fictive posée en hypothèse. Nous voyons qu'on peut admettre cette position pour l'origine fictive.

La figure 4.6. représente, à gauche, le tracé des profils précédents en X_1 et X_4, en fonction de la variable définie dans l'expression (3.15.).

- On constate sur cette figure un fait curieux : Dans sa partie supérieure, les profils des vitesses s'écartent du profil théorique de Seban et Bond, et ceci d'autant plus qu'on est plus près du point de stagnation.

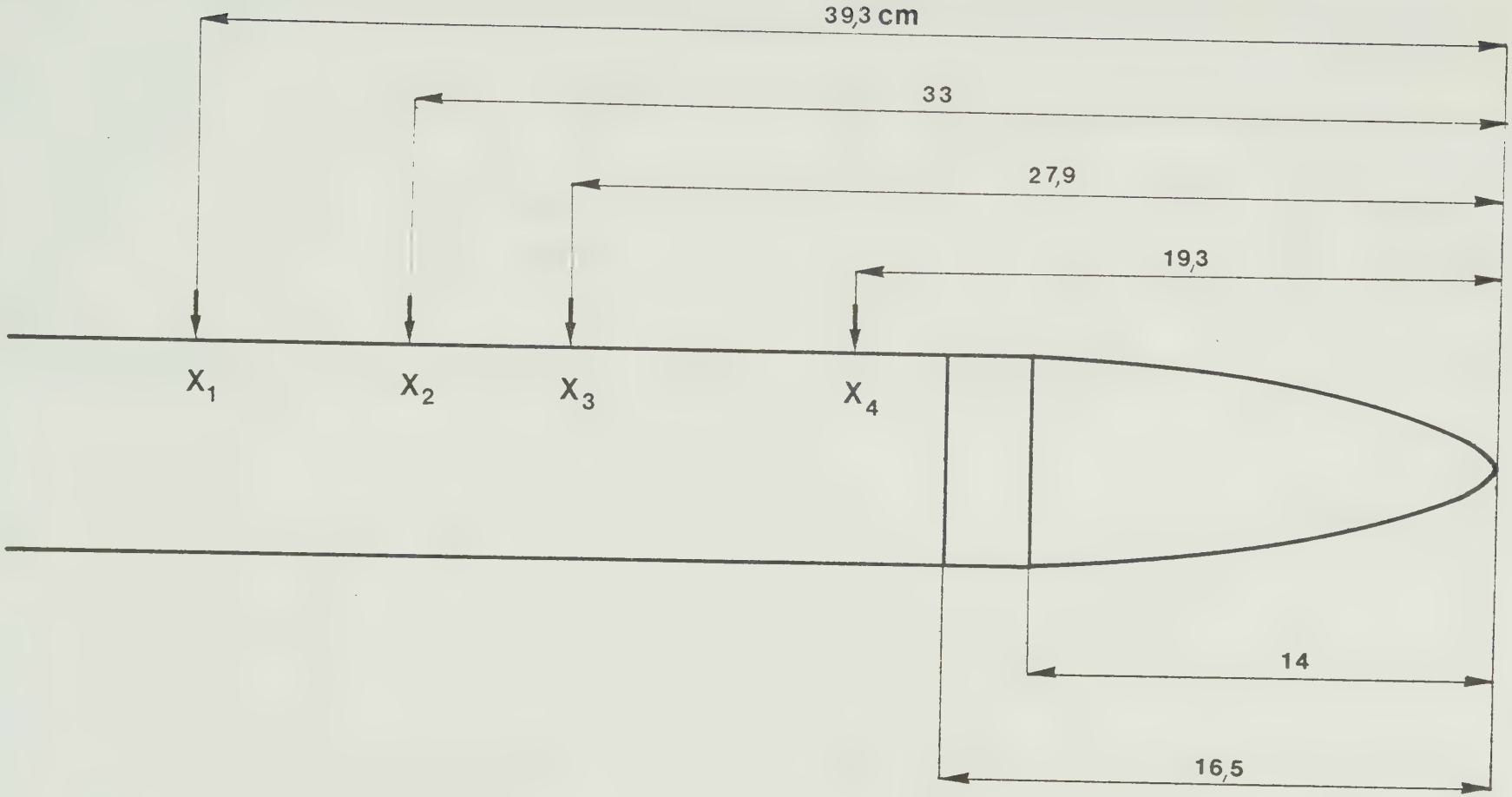
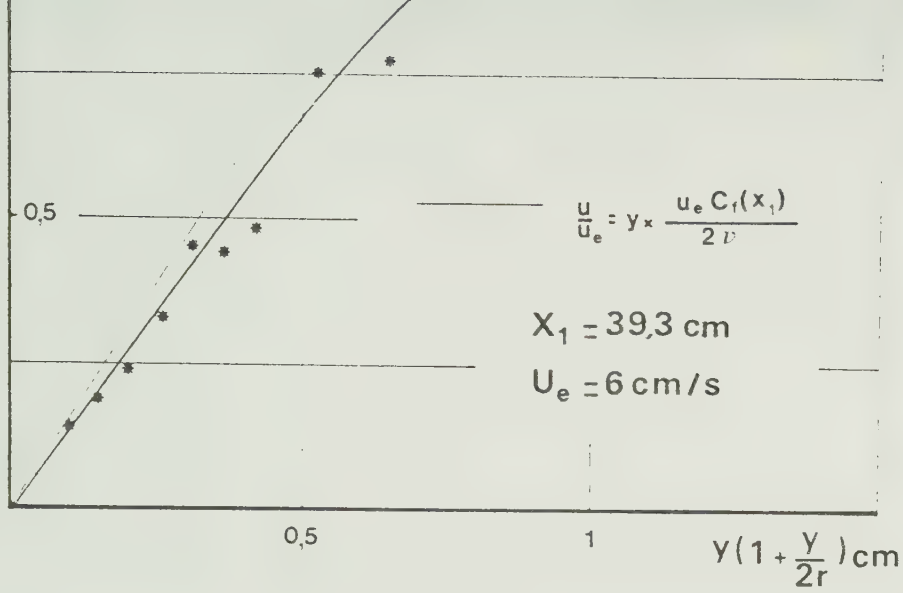
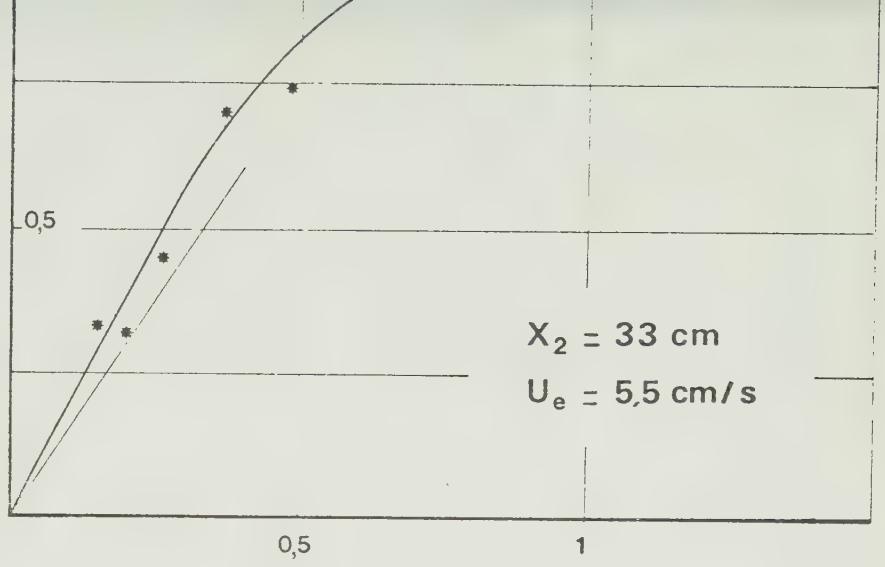
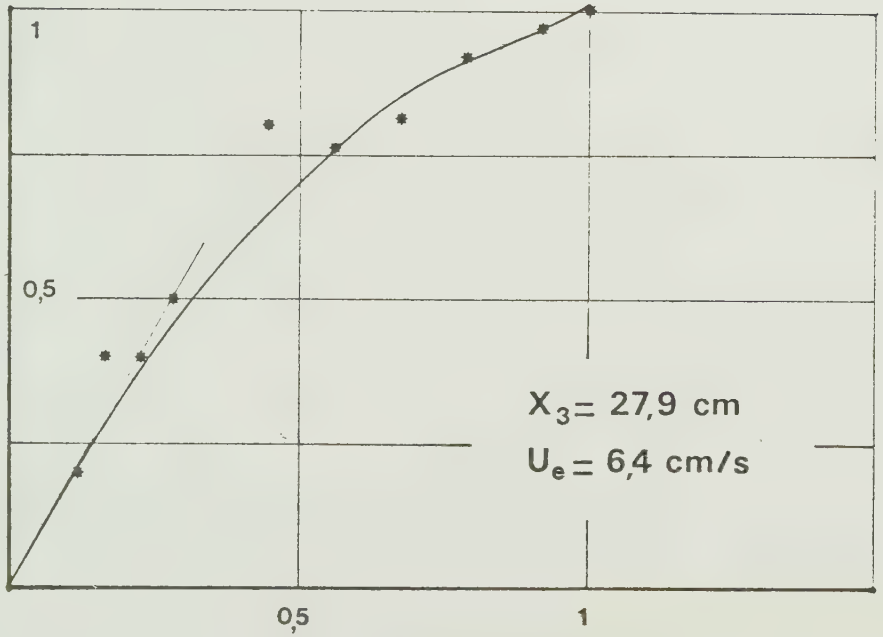


Fig. 4.4. : Position des points de mesure sur le modèle







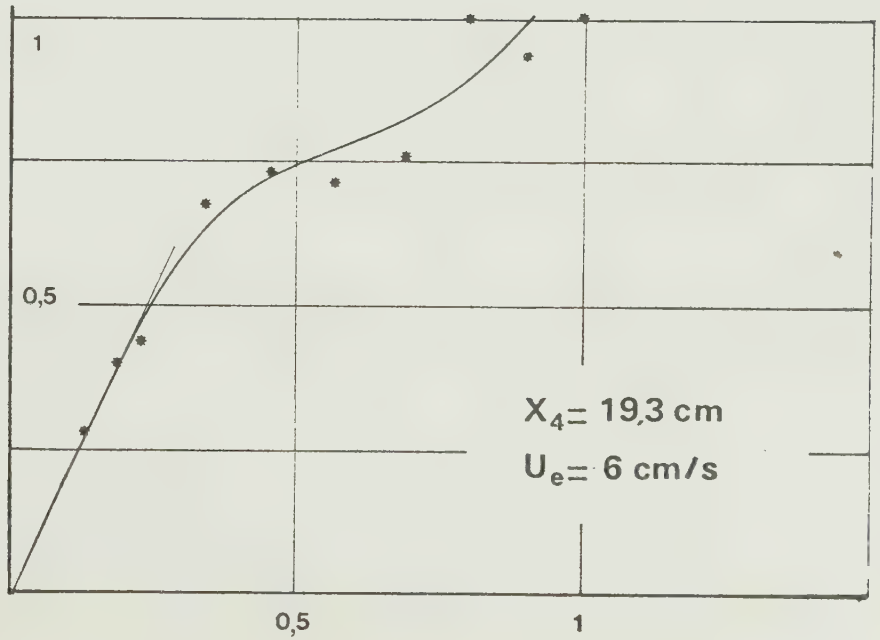
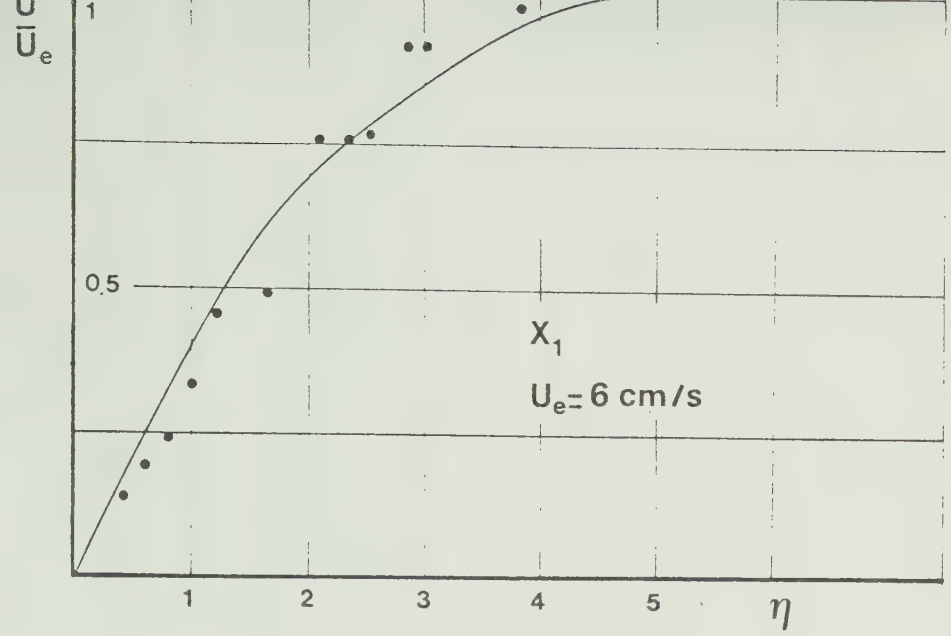
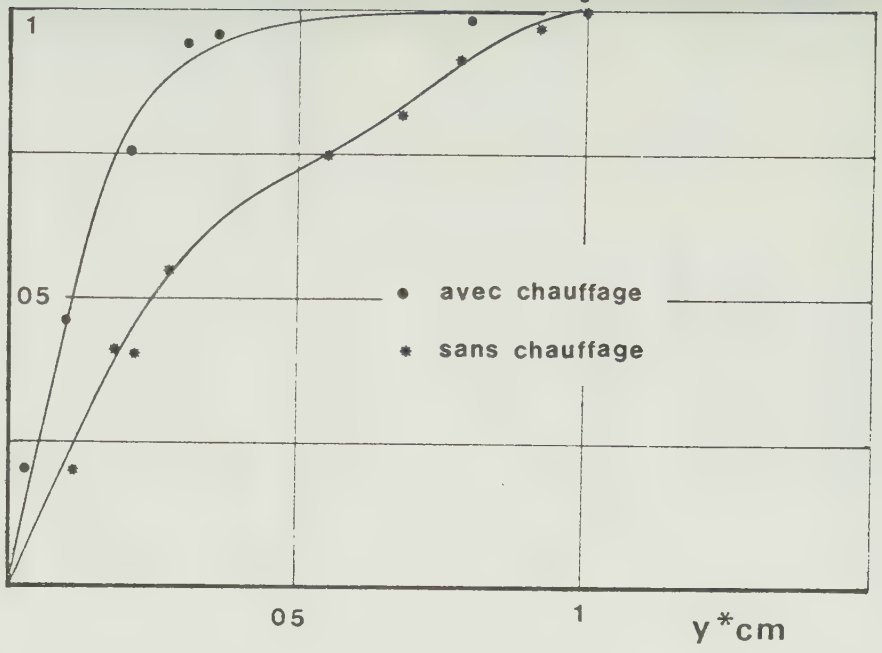


Fig. 4.5. : Profils de vitesse pour U_e = 6 cm/s





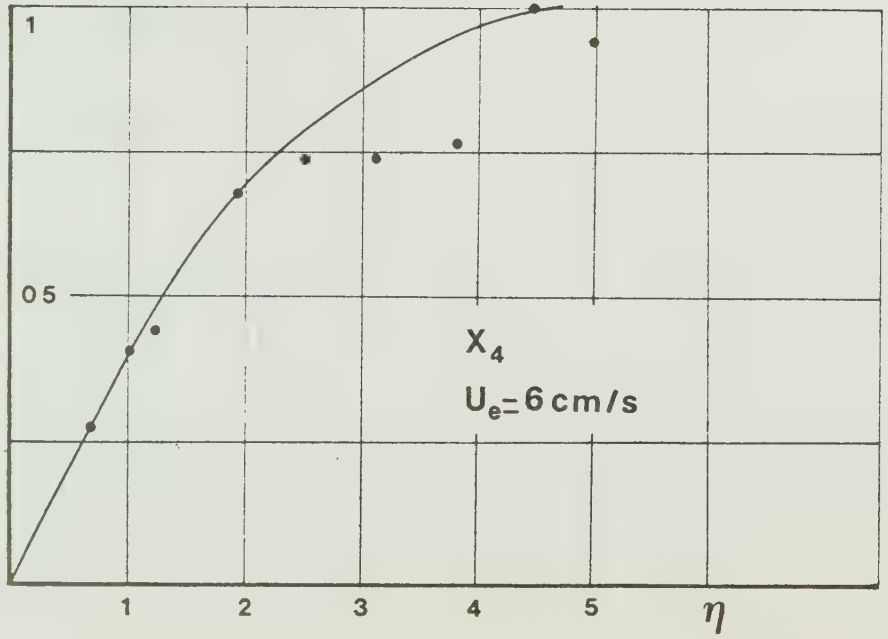


Fig. 4.6. : A gauche, profils de vitesses en coordonnées réduites.
A droite, profils de vitesses avec et sans flux thermique pariétal.

On pourrait émettre l'hypothèse que la couche limite n'a pas encore atteint la forme d'une couche cylindrique au point X_4. Pour lever toute ambiguïté à cet égard, nous ne présenterons dans ce mémoire que des simulations effectuées d'un point situé à 5 cm en aval de X_4.

Toutefois, étant donné que l'examen des profils en X_2 et X_3 montre qu'il y a une décroissance régulière de la courbure avec x, une autre hypothèse nous paraît plus probable.

Eichhorn [82] effectuant des mesures de profil autour d'un cylindre en des points situés sur une même section circulaire, a remarqué une asymétrie, particulièrement frappante dans le cas des épaisseurs de déplacement (leurs profils de vitesse étaient trop proches du profil de Blasius pour qu'on puisse détecter des différences sur ce point).

Richmond [82], en étudiant la couche limite laminaire, a mis l'accent sur la difficulté d'obtenir une couche limite parfaitement symétrique. Rao [74] attribue cette difficulté à la présence de gradients dans toute veine de mesures qui créent des instabilités ou des courants transversaux. Dans notre installation, en supprimant les nids d'abeille, nous avons mesuré des profils de vitesse présentant un palier marqué, que nous attribuons à un fort courant transversal, d'ailleurs observé par un traçage au permanganate de potassium. C'est pour supprimer au maximum cet effet, en plus du garnissage de la chambre de tranquillisation, nous avons équipé la sortie du convergent d'un nid d'abeille . Toutefois, nous supposons qu'il existe un écoulement transverse (swirl flow) résiduel qui introduit une composante w non nulle de la vitesse constituant, dans ses valeurs les plus fortes, un "défaut" dans le profil de u.

Bossel [30] a étudié les tourbillons visqueux, et on peut déduire de son étude que le profil suivant z de la composante de la vitesse varie entre la valeur à l'infini W_e et zéro à la paroi en passant par un maximum W_m *plus grand* que W_e (fig. 4.7.). On peut concevoir que cette sorte de "couche limite de tourbillon" ait une épaisseur qui croisse avec x, en variant sensiblement comme $(x/W_e)^{1/2}$. Dans ce cas, W_e étant nettement inférieur à U_e, la "couche de Swirl" grandira beaucoup plus vite que la couche limite de U_e. Dans ces conditions, le point où se situe la valeur maximum W_m, qui peut se trouver en "compétition" avec u dans la couche limite en X_4, sera nettement sorti de cette couche en X_1. D'où la disparition en X_1 du défaut sur u observé en X_4. Ce raisonnement est illustré par la figure (4.7.).

Les mesures précédentes ont été effectuées dans un liquide isotherme.

Le principe de l'anémométrie Doppler-Laser autorise la mesure des mêmes profils avec gradient de température, sans correction . La partie de droite de la fig. (4.6.) représente deux profils tracés pour U_e = 6 cm/s en X_1, l'un avec un flux nul à la paroi, l'autre avec une densité de flux C_f = 1 W/cm^2 (de l'ordre de deux fois ceux que nous utilisons en 4.2.). La température à l'infini est de l'ordre de 20°C, et l'échauffement de l'ordre aussi de 20°C. Nous avons vu, au chapitre 3, que sans faire d'hypothèse sur les profils, la variation des coefficients de transfert ne doit varier que de quelques pour cent.

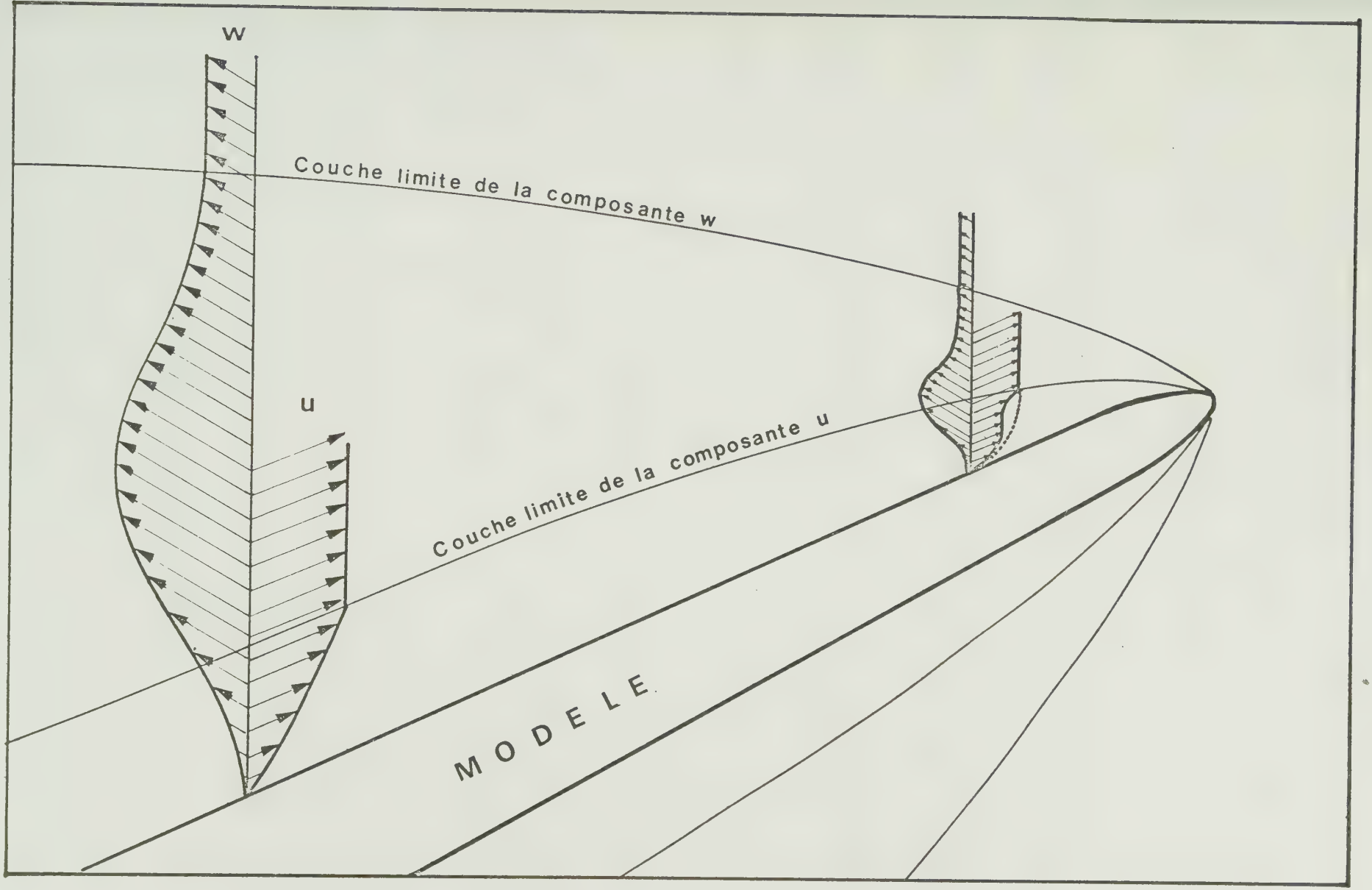


Fig. 4.7. : Justification des courbures de profils de vitesse

Dans le cas présent, nous avons calculé, dans les deux cas, le coefficient de frottement, en utilisant la viscosité locale du fluide (à la température de paroi), les pentes des profils de vitesse en fonction de y. Avec ces valeurs, on trouve pour la valeur expérimentale de σ :

$$\sigma_{exp.} = 1,02$$

La valeur théorique, calculée par la formule (3.5.) est :

$$\sigma_{théo.} = 1,054$$

On voit donc que, si les profils sont fortement perturbés, la "capacité de balayage" est faiblement affectée et que la correction (3.5.) est applicable.

Nous y voyons une raison supplémentaire de baser notre étude théorique sur la connaissance du transfert pariétal ; c'est pour cette raison également que nous ne présenterons pas de profils de concentration réduites dans la couche limite.

Nous allons donc maintenant, ayant défini un champ de vitesses dont la partie "active" suit le développement d'une couche limite prévisible par la théorie de Seban et Bond, présenter des résultats de simulations thermiques.

4.2. SIMULATION DE REACTIONS D'ORDRE n

Nous présentons ici des simulations effectuées avec des "cinétiques thermiques" de constante $K = 0,4$ à $0,7$, et des forces de référence ΔT_r variant de 10°C à 30°C. Les vitesses varient de 3,5 à 7 cm/s. Nous avons vu que l'origine x_0 des simulations décrites ici est située à environ 5 cm de l'arrière du paraboloïde (aux éléments n° 9 ou 10 suivant les cas).

La condition (1.17.) est réalisée en utilisant une programma Olivetti P101. Ce calculateur ne permet pas l'élévation rapide à une puissance quelconque. Nous avons pour cette raison choisi de ne simuler que des cinétiques d'ordre n multiple de 1/2. De plus, au-delà de n = 2, la variation de $\theta_w(x)$, dans la zone considérée est très faible. Aussi les simulations présentées ici sont-elles essentiellement d'ordre 0, 1/2, 1 et 2.

La loi de simulation (1.17.) peut s'écrire :

$$\phi = K\theta^n = \lambda \Delta T_r \times K_e \cdot \theta^n \qquad (1.17.)$$

Les paramètres principaux de la simulation sont donc :

- Les paramètres qui fixent la relation entre les phénomènes simulé et simulant :

  . ν et λ sont fixés par le choix du liquide

  . $\Delta T_r = T_r - T_e$ que l'on choisit

- Les paramètres qui déterminent la répartition de concentration pariétale :

  U_e que nous faisons varier

  K que l'on choisit dans des limites compatibles avec la résistance des isolants des fils de chauffage.

  n ordre de la réaction.

Les paramètres que nous pouvons faire varier sont donc ΔT_r, U_e, K et n.

Sans anticiper sur l'approche théorique du chapitre 5, nous pouvons, en présentant les courbes expérimentales, prévoir qualitativement l'influence de chacun des paramètres.

4.2a. L'influence de ΔT_r

ΔT_r intervient deux fois dans la loi (1.17.) : par définition, dans θ_w, et dans K, par l'intermédiaire de K_{th}. Des profils relatifs à une même cinétique K, mais avec des ΔT_r différents, seront donc distincts.

Considérons maintenant l'expression du flux :

$$\phi = (\lambda \times \Delta T_r) \frac{k(\rho C_e)^{n-1}}{D} \times \left(\frac{T_r - T_w}{T_r - T_e}\right)^n \qquad (1.17.)$$

Pour des paramètres hydrodynamiques identiques, diminuer ΔT_r en maintenant K fixe revient à simuler une réaction dont la cinétique est plus rapide (le plus grand) ou, plus précisément, dont le rapport de la cinétique à la diffusion (Damkhöler) est plus grand. Donc, plus ΔT_r est faible, plus la réaction simulée est rapide et plus les concentrations de surface diminuent vite.

En d'autres termes, ΔT_r permet de "dilater" le début de la courbe en coordonnées réduites $m = m_w(z)$.

Les figures (4.8.), (4.9.) et (4.10.) montrent l'influence de ΔT_r aux ordres 1, 1/2 et 2. On vérifie que, lorsque ΔT_r croît, la variable réduite $\theta_w(x)$ croît.

4.2b. L'influence de l'ordre de la réaction

Le flux ϕ s'exprime sous la forme :

$$\phi = k(\rho C_w)^n = k(\rho C_e)^{n-1} m_w^n$$

m_w est une concentration réduite, donc inférieure en général à 1. En écrivant

$$d\phi = k(\rho C_e)^{n-1} n m_w^{n-1} dm_w$$

on voit que, m_w étant inférieur à 1, plus n sera petit, moins ϕ dépend de m_w. Donc les courbes $m_w(x)$ seront d'autant plus près de l'axe des x que n sera petit. Ce que l'on vérifie sur les courbes (4.11.) et (4.12.).

4.2c. L'influence de la vitesse est évidente : plus U_e est grand, plus la couche limite est mince, l'apport de matière est donc plus important à la paroi. Donc, quand U_e croît, la concentration pariétale croît.

On vérifie ce fait sur la figure (4.13.), à l'ordre 1/2.

4.2d. L'influence de K se conçoit aisément : plus K est grand, plus la cinétique est rapide, donc la concentration pariétale décroîtra avec K.

C'est ce que nous pouvons vérifier expérimentalement sur les figures (4.14.) et (4.15.) aux ordres 1 et 1/2.

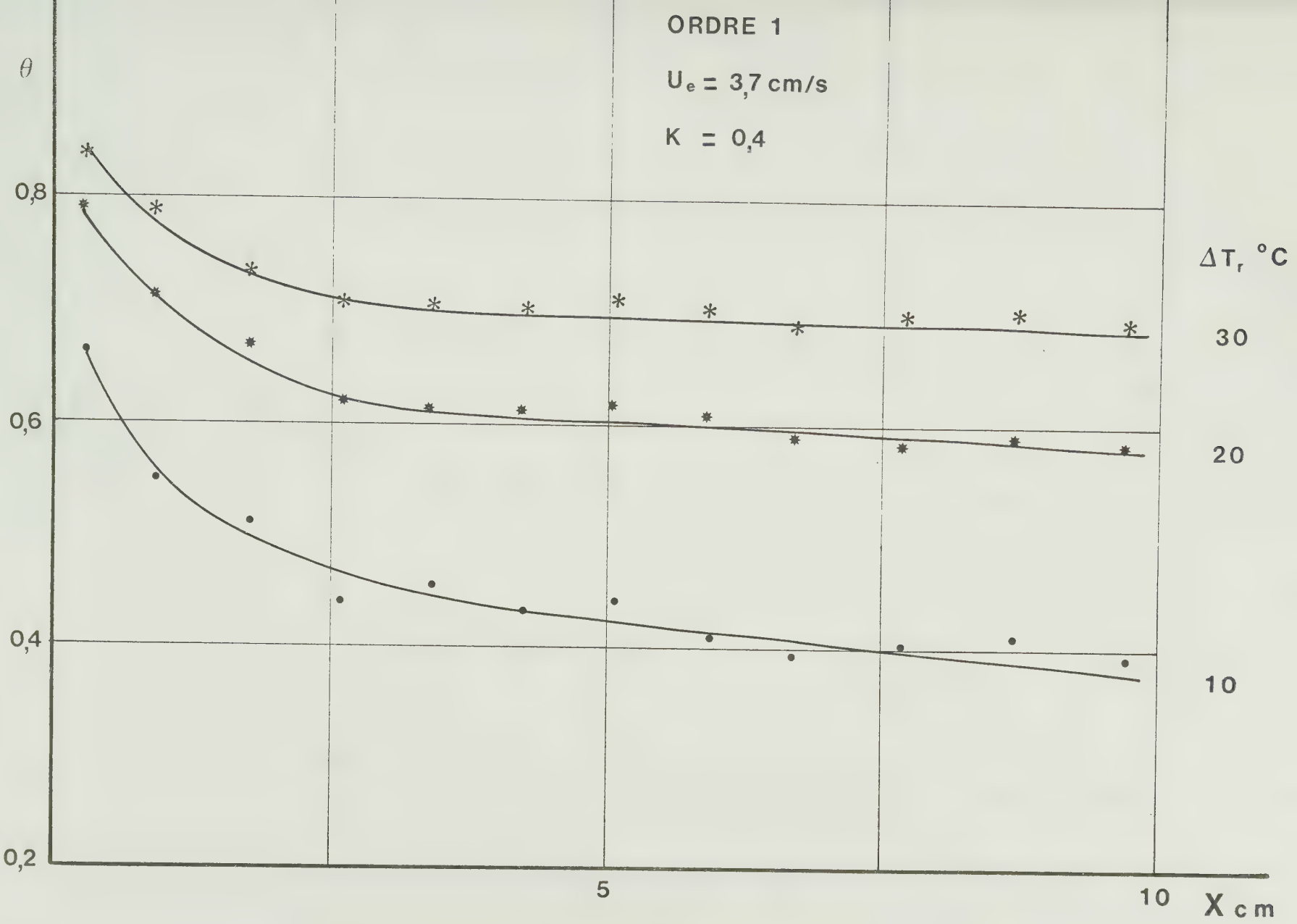


Fig. 4.8. : Simulations thermiques à l'ordre 1
Influence de $T_r - T_e$

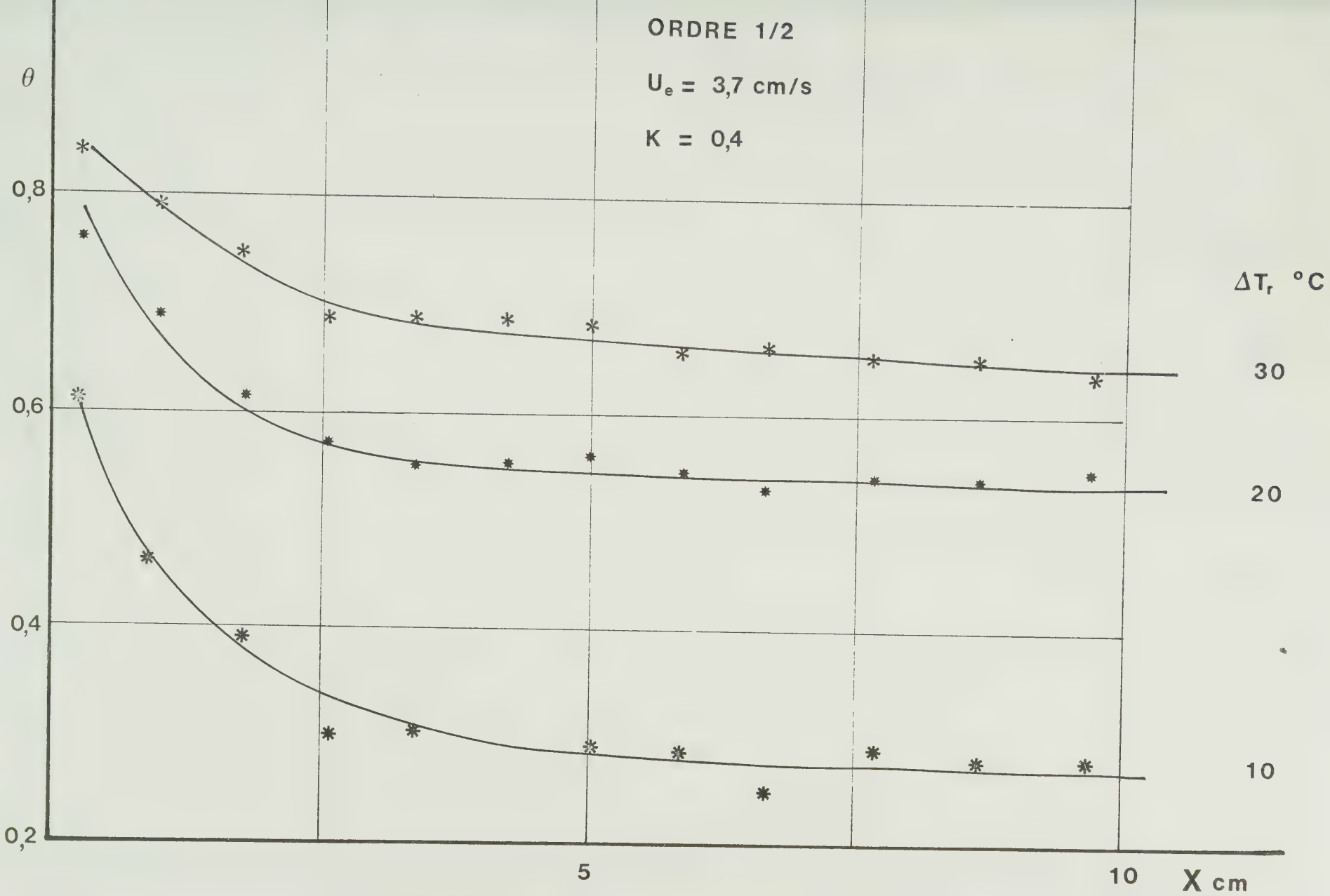


Fig. 4.9. Simulation à l'ordre 1/2. Influence de $T_r - T_e$

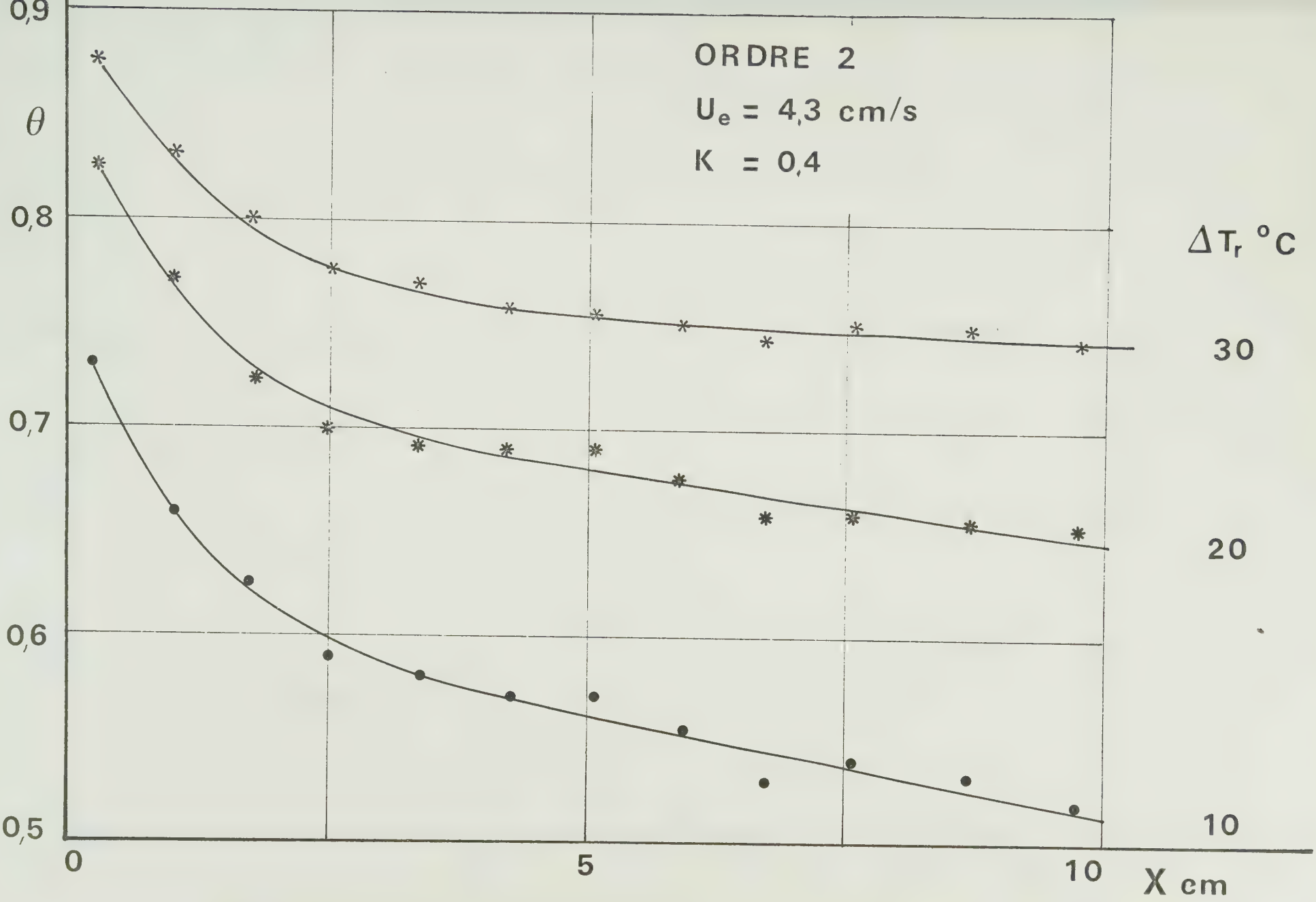


Fig. 4.10. : Simulations à l'ordre 2. Influence de $T_r - T_e$

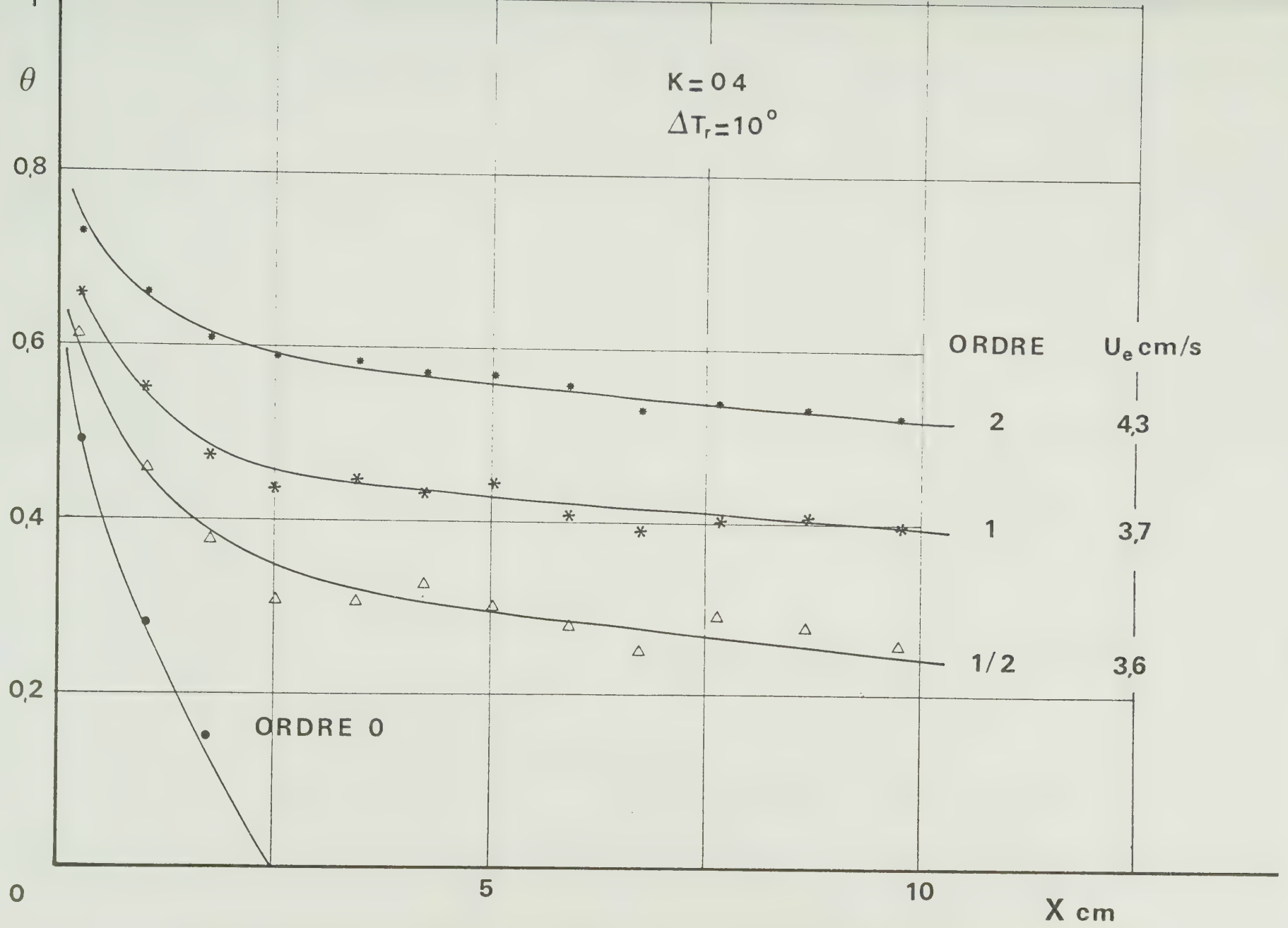


Fig. 4.11. : Influence de l'ordre de réaction
($T_p - T_\infty$ = 10°C)

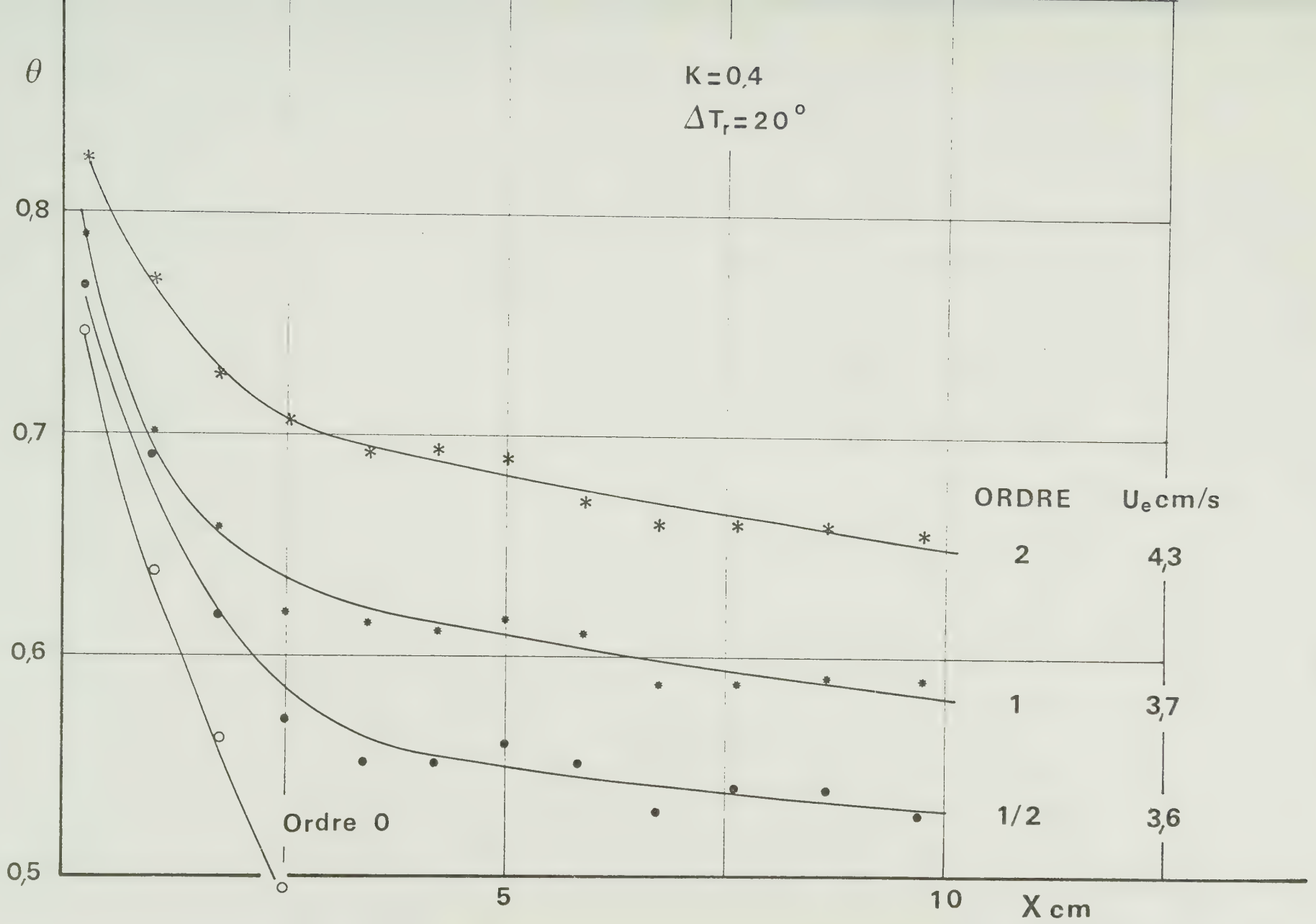


Fig. 4.12. : Influence de l'ordre de réaction
($T_r - T_w$ = 20°C)

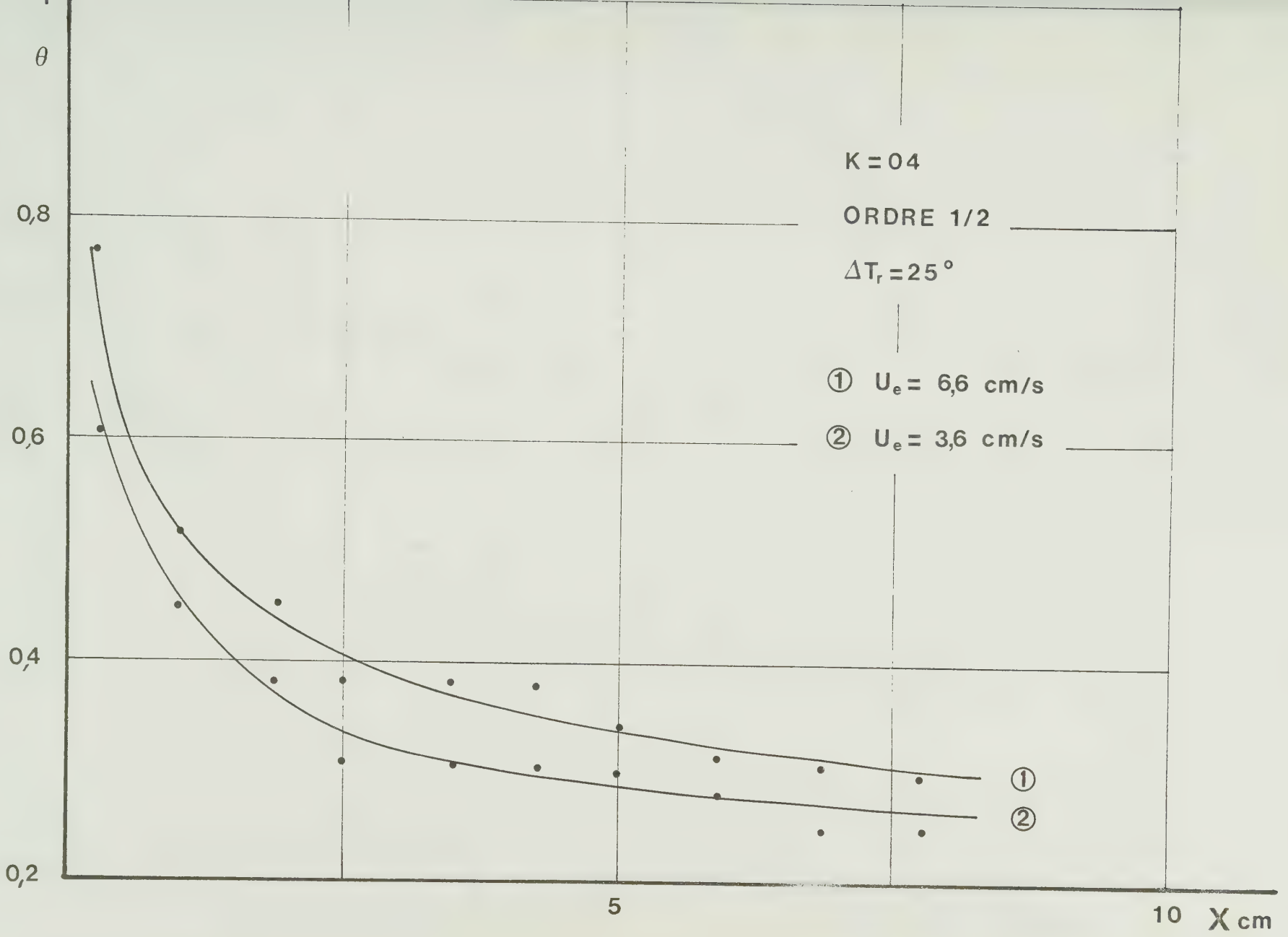


Fig. 4.13. : Influence de la vitesse

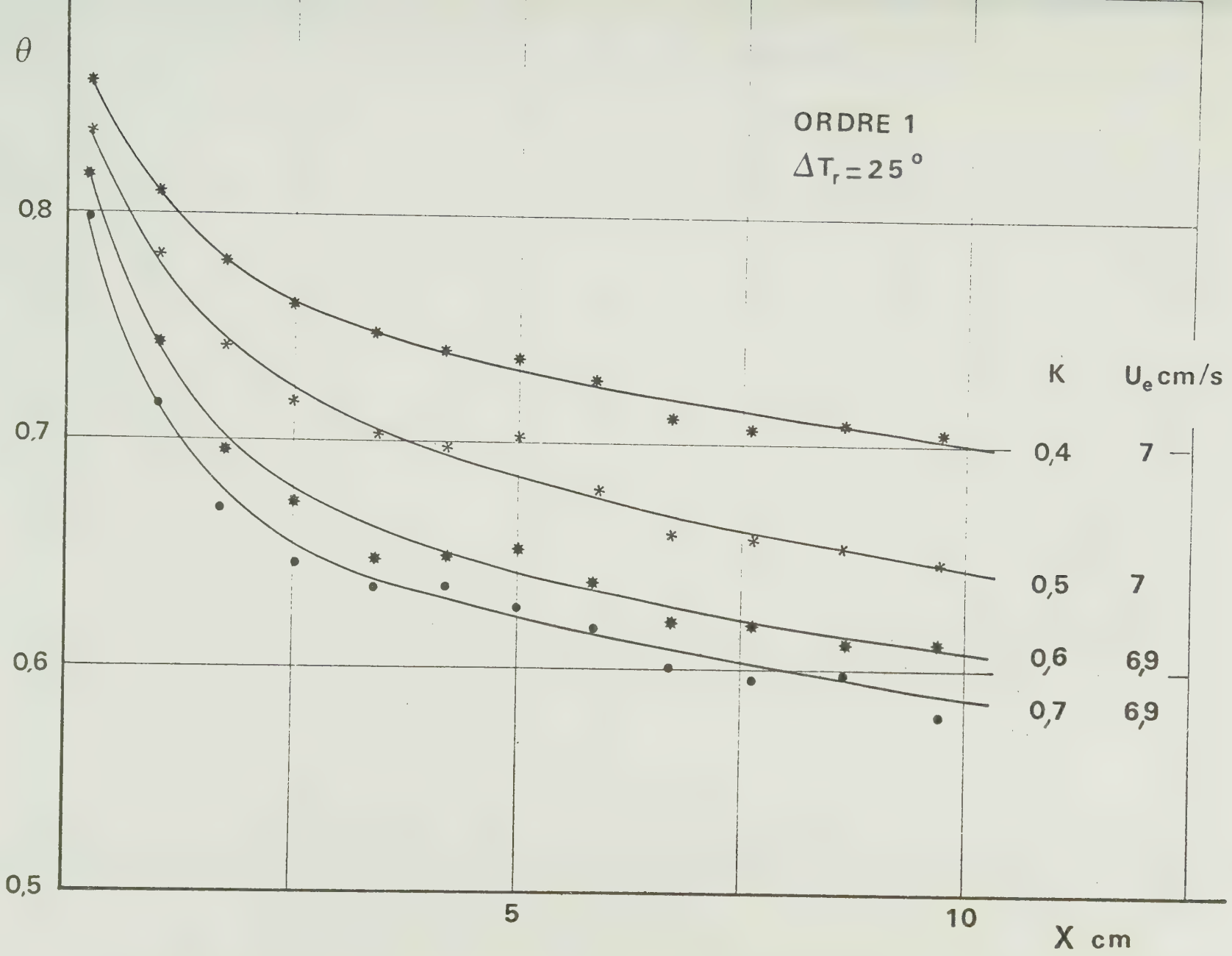


Fig. 4.14. : Influence de la constante de cinétique à l'ordre 1

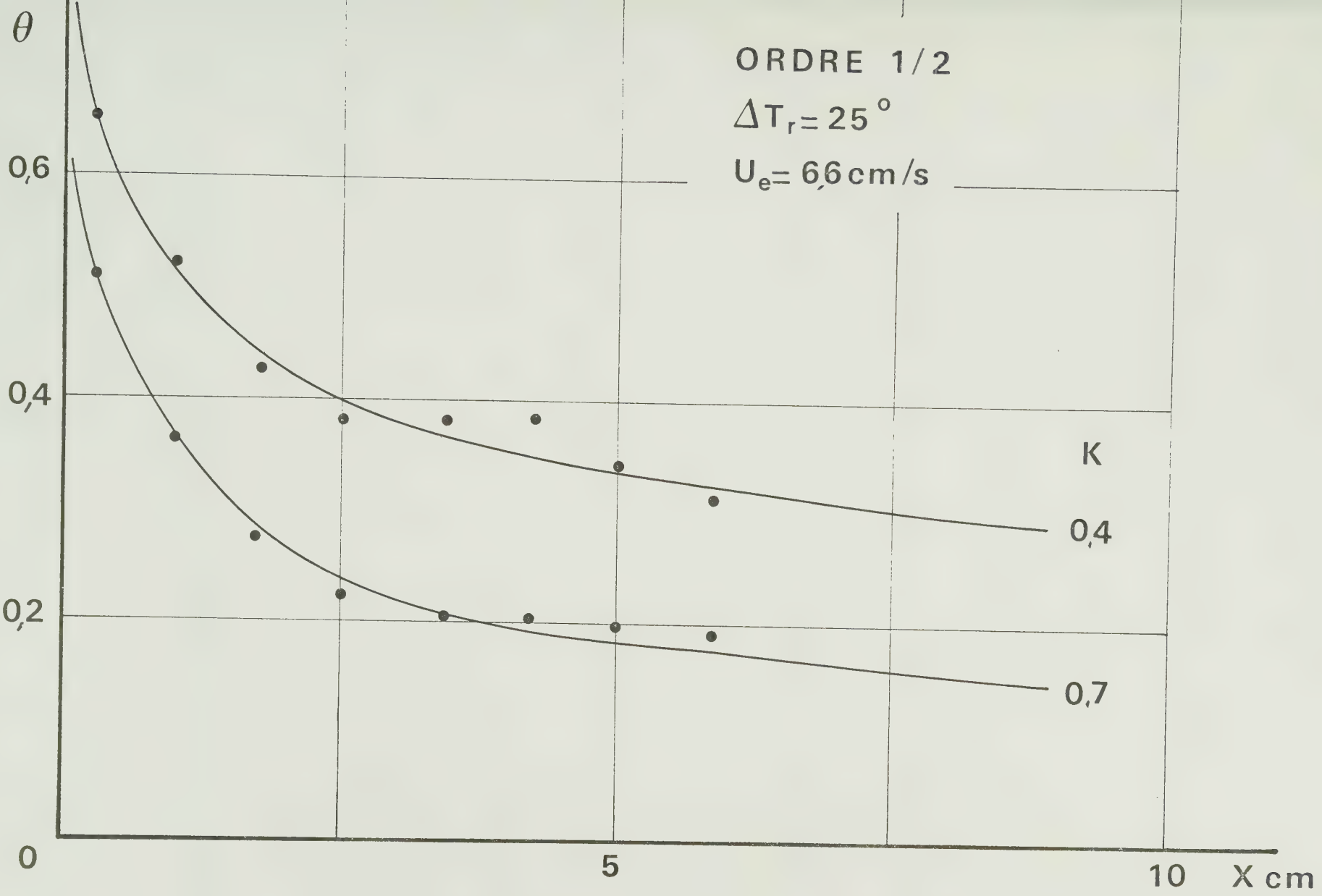


Fig. 4.15. : Influence de la constante de cinétique à l'ordre 1/2

Notons qu'en effectuant ces manipulations, nous n'avons pas cherché à simuler une réaction particulière. Il nous a paru plus intéressant de montrer expérimentalement la portée des différents paramètres de l'analogie. Nous avons été conduits, dans le choix des conditions expérimentales, par la recherche d'un compromis entre des exigences contradictoires :

- réduire $T_w - T_e$ à la plus faible valeur possible afin de limiter les effets des variations de viscosité,
- réduire l'erreur sur θ.

En évaluant l'erreur sur θ, on trouve :

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = \frac{\Delta(T_r - T_w)}{T_r - T_w} = \frac{\Delta T_w}{T_r - T_w}$$

Donc, plus la force de référence est grande, meilleure est la précision. Mais dans ce cas, la variation de C_w est plus faible.

Nous avons trouvé un bon compromis en opérant avec des ΔT_w de l'ordre de 10 à 20°C maximum. Dans ce cas, en évaluant l'erreur sur T_w à 0,2°C, nous trouvons, pour $\Delta T_r = 20$:

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} \sim 1\ \%$$

erreur à laquelle il faut bien évidemment ajouter l'erreur sur l'estimation du flux, que l'on peut considérer comme une erreur sur K.

Le problème se pose aussi de la manière de tracer la courbe $m_w(x)$. En toute rigueur, θ_w a la forme d'une oscillation autour d'une courbe continue (fig. 4.16.). On peut présenter les résultats sous la forme d'un escalier, chaque élément étant pourvu de son θ_{moyen} qui est le θ mesuré. Il nous a paru plus logique, dans l'optique d'une véritable simulation, de considérer que le point de la courbe $\theta_w(x)$ où se place θ_{moyen} est le centre de l'élément. Dans ce cas, nous préférerons, comme nous l'avons fait ici, et comme nous le ferons au chapitre 5, tracer une courbe continue passant au mieux parmi les points expérimentaux, et que nous dirons être la répartition de concentration pariétale réduite dans le cas de l'analogie.

Remarquons enfin que, dans les considérations qualitatives de 4.2a à 4.2d, nous justifions expérimentalement l'utilisation de la variable z, que nous introduirons mathématiquement au chapitre 5.

Nous verrons en particulier que m_w décroît avec la variable z :

$$z = \left[\sqrt{\frac{\nu}{U_e}} \times \frac{k(\rho C_e)^{n-1}}{D} \times \frac{1}{\theta}\right]^2 x$$

donc l'analogue thermique est :

$$z = \left[\sqrt{\frac{\nu}{U_e}} \times \frac{K}{\lambda \Delta T_r} \times \frac{1}{\theta}\right]^2 x$$

Nous avons en effet constaté expérimentalement que, pour un ordre donné :

- m_w décroît avec x et K.
- m_w croît avec T_r et U_e.

Nous allons maintenant confronter, en laminaire, les répartitions mesurées de $m_w(z)$ avec celles prévues par le calcul.

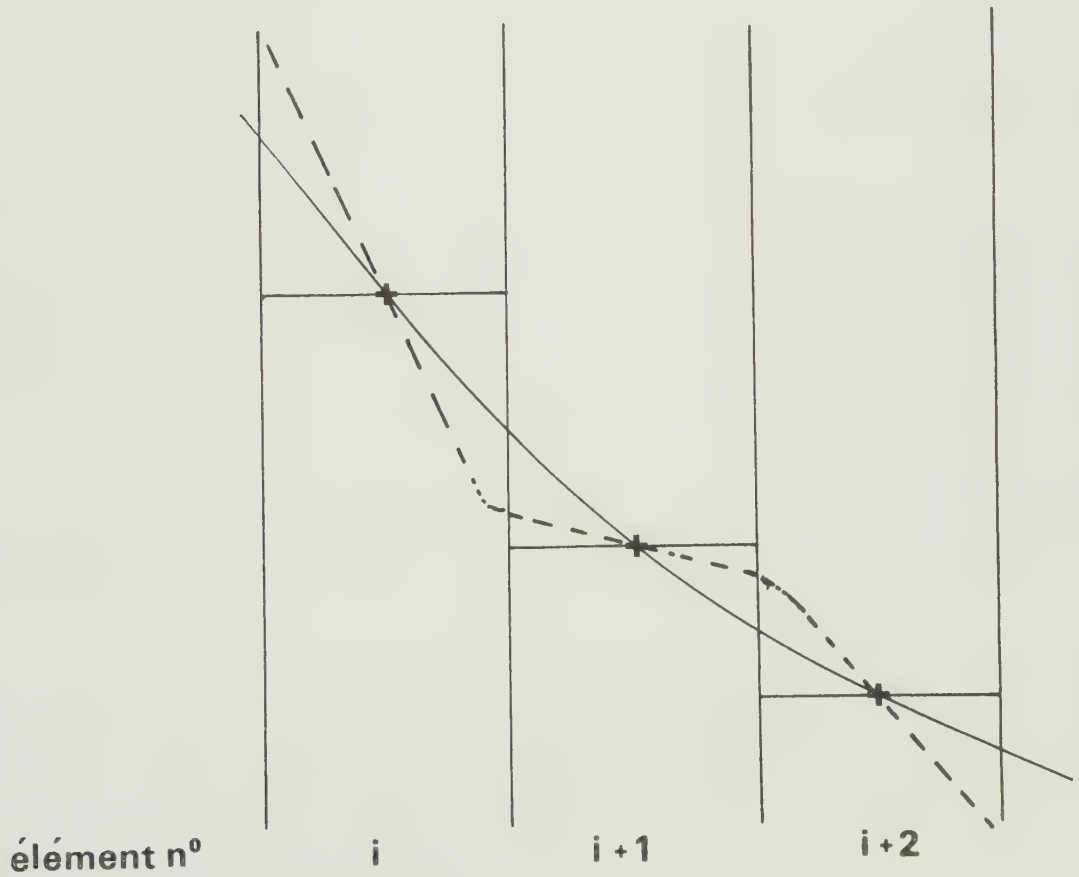


Fig. 4.16

Chapitre 5

Le calcul des concentrations pariétales en régime laminaire

Nous avons précédemment exposé, aux chapitres 3 et 4, les raisons pour lesquelles des simulations effectuées dans un liquide prennent tout leur intérêt dans l'étude de la répartition des flux pariétaux. Ce n'est d'ailleurs pas une limitation propre à l'analogie thermique, mais plutôt une restriction due à des conditions expérimentales. Cette remarque est surtout valable pour des expérimentations en régime laminaire, les variations des propriétés moléculaires étant en général moins déterminantes dans un écoulement turbulent en ce qui concerne les profils, tout au moins dans la gamme de températures envisagée ici.

Nous avons placé le présent travail dans l'optique plus générale d'une étude systématique de réacteurs de géométries qui rendent peu utilisables d'autres méthodes d'investigations. La répartition du flux pariétal reste donc l'élément déterminant. Toutefois, pour définir les limites d'un tel dispositif, il nous faut apprécier la validité des résultats recueillis ici. Dans le cas des expériences du chapitre 4, un calcul nous fournira la référence nécessaire.

Comme nous l'expliquons aux chapitre et annexe 3, le calcul des concentrations prévisibles à la surface de notre modèle passera par celui des profils pariétaux au-dessus d'une plaque plane.

Encore que le régime turbulent soit celui qui présente le plus grand intérêt pratique, c'est le cas de la couche limite laminaire qui est le plus traité. Ce chapitre y sera plus particulièrement consacré. Plusieurs auteurs [38] [45] [49] ont publié des revues, plus ou moins exhaustives, des méthodes utilisables. Toutefois, beaucoup de ces résolutions des équations de transfert prennent comme condition aux limites une paroi catalytique dès l'origine de la couche limite. C'est pourquoi il nous a paru utile de reprendre ici l'essentiel de ces procédés de calcul et d'établir les possibilités qu'elles offrent dans le cas d'un échelon de catalyse.

Suite à cette étude, nous détaillerons la méthode de calcul que nous avons employée. Enfin, la comparaison de l'expérience et de la théorie nous permettra de mettre en évidence certaines modalités d'application de l'analogie thermique.

5.1. LE PROBLEME

Nous cherchons la répartition de concentration d'un constituant dans une couche limite bidimensionnelle développée au-dessus d'une plaque plane catalytisant une réaction strictement limitée à cette paroi et à ce constituant (fig. 5.1.).

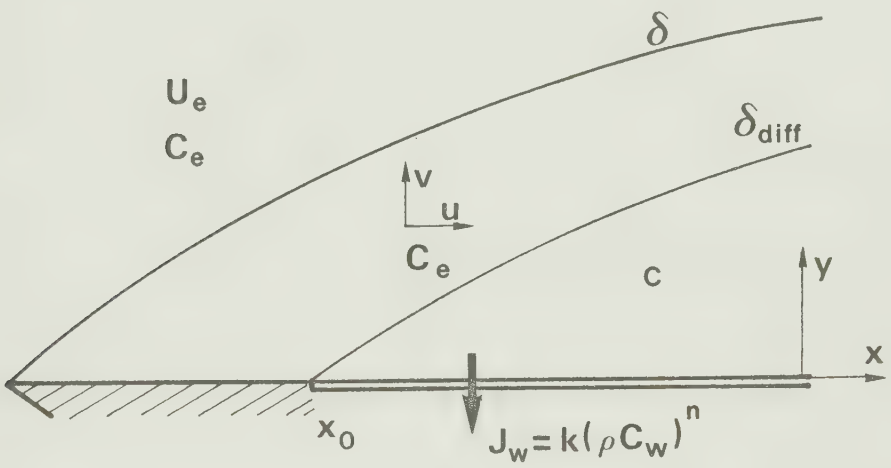


Fig. 5.1.

Pour la clarté de l'exposé, nous reprendrons ici le système d'équations à résoudre, encore qu'il soit identique au système (1.8.).(1.12)

Soient :

D le coefficient de diffusion de l'espèce réagissante dans le fluide vecteur,

ν la viscosité cinématique du fluide vecteur,

ρ la densité du fluide porteur

k la constante de cinétique de la réaction, n son ordre.

$m = C/C_e$ la concentration réduite du composant.

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (5.1.)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \qquad (5.2.)$$

$$u \frac{\partial m}{\partial x} + v \frac{\partial m}{\partial y} = D \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \qquad (5.3.)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x \neq 0 \quad y \to \infty & \end{array}\right| \quad \begin{array}{ll} u = U_e & (5.4a) \\ m = 1 & (5.5a) \end{array}$$

$$y = 0 \qquad u = 0 \qquad (5.4b)$$

$$x > x_0 \qquad D \left.\frac{\partial m}{\partial y}\right|_{y=0} = k(\rho C_e)^{m-1} m^n \qquad (5.5b)$$

$$x < x_0 \qquad m(x,0) = 1$$

Le terme de pression $-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$ dans (5.2.) pourra ne pas apparaître dans l'exposé de certaines méthodes. Nous le préciserons alors.

Dans le cas d'un écoulement turbulent, on peut remplacer, avec Boussinesq, D et ν par :

$$D = D_{mol.} + D_t$$

$$\nu = \nu_{mol.} + \nu_t$$

où mol et t désignent les valeurs moléculaires et turbulentes des coefficients considérés. Ce sont alors les valeurs moyennes des vitesses et des concentrations qui figurent dans les équations.

5.2. LES METHODES DE RESOLUTION

Nous les partagerons en deux classes, celles qui supposent connue la solution du problème de transfert à force constante ; en règle générale, elles se réduisent au calcul des flux pariétaux. D'autres traitent plus généralement le problème en partant du système (5.1.) à (5.5b).

Dans un premier temps, nous n'envisagerons ici que le cas d'un régime laminaire.

5.2a. Un premier groupe de méthodes suppose connu le transfert à force diffusive (driving force) constante.

Plus précisément, on sait exprimer le flux pariétal en fonction de la concentration de surface lorsque la condition (5.5b) est remplacée par :

$$y = 0 \qquad x > x_0 \qquad m(x,0) = m_{w_{iso}} \tag{5.5c}$$

$$x < x_0 \qquad m(x,0) = 1$$

le flux s'exprime alors par :

$$J_{w_{iso}} = C_e h(x,x_0)(1-m_{iso}) \tag{5.6.}$$

Notons que le coefficient de convection peut, dans de nombreux cas, s'exprimer sous la forme :

$$h(x,x_0) = h(x,0)\ g(\frac{x_0}{x}) \tag{5.7.}$$

Ainsi par exemple h(x,0), en laminaire, peut être déduit du résultat de Polhausen (voir chapitre 3), $g(\frac{x_0}{x})$ est alors donné par Eckert [4].

5.2aa. La méthode la plus simple est celle suggérée par Frank-Kamenetskii [39] : on considère que la relation (5.6.) valable pour une concentration $m_{w_{iso}}$ constante, l'est aussi lorsque $m_w(x)$ varie sous l'action d'une réaction

chimique. On identifie alors J_w à la disparition par réaction chimique :

$$J_w = k(\rho C_w)^n = k(\rho C_e)^n \, m_w^n \qquad (5.8a)$$

on en déduit :

$$\frac{m_w^n}{1-m_w} = \frac{h(x,x_0)}{\rho k(\rho C_e)^{n-1}} \qquad (5.8b)$$

ce qui donne, au premier ordre, une forme particulièrement simple, lorsque x_0 est nul.

En effet, écrivons le nombre de Sherwood :

$$Sh = \frac{J_w x}{(C_e - C_w)\rho D} = \frac{k \, m_w \, x}{(1-m_w)D} = \theta \sqrt{\frac{U_e x}{\nu}} \qquad (5.9.)$$

Nous voyons apparaître la variable $\sqrt{z}$:

$$\sqrt{z} = \frac{k}{D}\sqrt{\frac{\nu}{U_e}} \times \frac{\sqrt{x}}{\theta} \qquad (5.10.)$$

Et on écrit alors :

$$m_w(z) = \frac{1}{1+\sqrt{z}} \qquad (5.11.)$$

Cette méthode est d'autant plus approximative que $m_w(x)$ varie vite. C'est donc au voisinage du début de la catalyse qu'elle donnera de mauvais résultats, effet s'aggravant avec z_0.

5.2ab. Au lieu de conserver la relation entre flux et gradient de concentration, Rosner [47] propose de conserver celle qui existe à force constante entre le flux et l'épaisseur de diffusion δ^* définie par :

$$\delta^* = \int_0^\infty \frac{u}{U_e}\left(1 - \frac{C-C_w}{C_e-C_w}\right) dy \qquad (5.12.)$$

Cette méthode est exposée dans [47] pour des couches limites dynamiques et de diffusion ayant même origine. Nous avons repris le calcul pour un échelon de catalyse situé à l'abscisse x_0. Nous avons renvoyé le calcul détaillé à l'annexe 4 et en donnons ici le résultat. En exprimant m_w en fonction de la variable réduite z, m_w sera solution de l'équation intégrale :

$$m_w^n(z) = \frac{(1-m_w)^2 \; M(z,z_0)}{\left[2 \int_{z_0}^{z} M(\zeta,z_0)(1-m_w)^2 \; d\zeta\right]^{1/2}} \qquad (5.13.)$$

où

$$M(z,z_0) = \frac{g\left(\frac{z_0}{z}\right)}{\sqrt{z}} \int_{z_0}^{z} g\left(\frac{z_0}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \qquad (5.14.)$$

$g\left(\frac{z_0}{z}\right)$ est défini en (5.7.) avec la condition

$$z < z_0 \qquad m_w(z_0) = 1 \qquad (5.15.)$$

La résolution numérique de (5.13.) assortie de (5.14.) nous permet de calculer $m_w(z)$.

5.2ac. La méthode de superposition

Chambre [42] a mis en évidence que, si on connaît une solution de la forme (5.6.) lorsque la concentration pariétale est constante, on peut en déduire l'expression du flux J_w pariétal lorsque C_w est variable.

$J_w(x)$ est alors de la forme :

$$J_w(x) = - \int_{x_0}^{x} \beta(x,\xi) \; \frac{dm}{d\xi} \; d\xi \qquad (5.16.)$$

l'intégrale étant considérée comme une intégrale de Stieltjes.

Notons que :

$$\beta(x,x_0) \equiv C_e h(x,x_0)$$

Ceci reste valable quand $J_w(x)$ est la conséquence d'une réaction chimique. Donc, la concentration réduite pariétale recherchée, $m_w(x)$ sera solution de :

$$k(\rho C_e)^{n-1} \rho m_w^n = - \int_{x_0}^{x} \beta(x,\xi) \frac{dm}{d\xi} d\xi \qquad (5.17.)$$

Chambre [42] donne quelques expressions du noyau $\beta(x,x_0)$ rencontrées dans la littérature.

Remarquons que, dans de nombreux cas, [2], [4], [12], [13], [10], on peut écrire $h(x,x_0)$ sous la forme :

$$h(x,x_0) = \theta_p \frac{R^p}{x} \rho D g_p\left(\frac{x}{x_0}\right) \qquad (5.18.)$$

En généralisant la variable z introduite précédemment, nous pouvons définir :

$$z_0 = Gn_p x = \left[\frac{k(\rho C_e)^{n-1}}{D} \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^p \times \frac{1}{\theta_p}\right]^{\frac{1}{1-p}} x \qquad (5.19.)$$

Notons que $z_{0,5}$ est identique à la variable z définie au chapitre 1 et que $\theta_{0,5}$ est identique à θ_{cst}. (5.17.) prend alors la forme :

$$\boxed{m_w^n(z_p) = - \frac{1}{z_p^{1-p}} \int_{z_{0_p}}^{z_p} g_p\left(\frac{z_p}{\zeta_p}\right) dm_w(\zeta_p)} \qquad (5.20.)$$

Cette méthode est formellement exacte. La valeur des solutions ne dépend que de la validité du noyau employé et de la précision de la méthode numérique utilisée pour résoudre (1.17.).

5.2b. *Toutes ces méthodes supposent la connaissance préalable d'une loi de transfert simple.* De plus, elles ne donnent pas accès au calcul des profils. C'est pourquoi d'autres auteurs envisagent le calcul de m(x,y) directement à partir du système (5.1.) à (5.5b).

Appliquons la transformation de Von Mises :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.21.}$$

L'équation (5.1.) est automatiquement vérifiée. (5.2.) et (5.3.) se réécrivent, dans le système x,ψ :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \tag{5.22.}$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = D \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial m}{\partial \psi} \right) \tag{5.23.}$$

avec les conditions aux limites

$$u(x,0) = 0 \tag{5.24a}$$

$$u(0,\psi) = u(x,\infty) = U_e \tag{5.25a}$$

$$m(x,\infty) = 1 \tag{5.24b}$$

$$Du \frac{\partial m}{\partial \psi}\bigg|_o = k(\rho C_e)^{n-1} m^n \tag{5.25b}$$

5.2ba. Chambre et Acrivos [40] proposent, en l'absence d'un gradient de pression, le passage au système de coordonnées ξ, η où

$$\xi = \frac{\sqrt{z}}{\Theta}$$

tel que nous avons déjà défini z, et

$$\eta = \frac{y}{2x} \sqrt{Rx} \tag{5.26.}$$

On définit aussi :

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu U_e x}} \tag{5.27.}$$

Le système s'écrit alors :

Equations du mouvement (Equation de Blasius) :

$$f''' + f\,f'' = 0 \qquad (5.28a)$$

$$f(0) = f'(0) = 0 \qquad f'(\infty) = 2 \qquad (5.28b)$$

Equation de la diffusion :

$$\frac{1}{Sc}\,\frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} + f\,\frac{\partial m}{\partial \eta} - \xi\,f'\,\frac{\partial m}{\partial \xi} = 0 \qquad (5.29a)$$

avec

$$\left.\frac{\partial m}{\partial \eta}\right|_o = \xi\,m^n \qquad (5.29b)$$

$$m(0,\psi) = m(\xi,\infty) = 1 \qquad (5.30.)$$

Chapman et Rubesin ont montré qu'on pouvait trouver une solution de la forme :

$$m(\xi,\eta) = 1 + \sum_1^\infty b_i\,\xi^i\,Y_i(\eta) \qquad (5.31.)$$

- Les Y_i sont solutions de l'équation :

$$\frac{1}{Sc}\,Y_i'' + f\,Y_i' - i\,f'\,Y_i = 0 \qquad (5.32a)$$

avec

$$Y_i(0) = 1 \qquad Y_i(\infty) = 0 \qquad (5.32b)$$

- Les b_i sont déterminés par les conditions à la paroi :

$$\sum_1^\infty b_i\,\xi^i\,Y_i'(0) = \xi\left(1 + \sum_1^\infty b_i\,\xi^i\right)^n \qquad (5.32c)$$

Notons que :

1) La convergence de ces séries est très lente.

2) A l'ordre deux, le rayon de convergence est fini. Une étude numérique montre qu'il est de l'ordre de $|\xi| = 0,6$.

3) La fonction Y_i a été calculée par plusieurs auteurs, mais pas dans le cas d'un échelon de catalyse.

5.2bb. Chambre et Acrivos proposent, en l'absence d'un gradient de pression, une autre méthode [41] qui utilise le calcul des flux pariétaux par Lighthill [10].

L'hypothèse fondamentale consiste à remplacer le profil des vitesses par son asymptote à la paroi. Nous ne reproduirons pas leur calcul ici. Il importe seulement de savoir qu'ils aboutissent à une équation intégrale qui peut se mettre sous la forme :

$$m_w^n = -\frac{1}{\sqrt{z}} \int_{z_0}^{z} \frac{d\, m_w(\zeta)}{\left(1 - (\frac{\zeta}{z})^{3/4}\right)^{1/3}} \qquad (5.33.)$$

z est toujours défini par (5.10.).

5.2bc. Cette dernière méthode suppose une pression constante. Lassau [43] [44] [45] a proposé une méthode permettant de tenir compte des gradients de pression et autorisant également le calcul dans le cas d'une répartition quelconque du catalyseur. Nous ne pouvons en donner ici que le principe et les principaux résultats.

Partant du système d'équations sous la forme adimensionnelle (1.8.) à (1.12b), on effectue successivement la transformation de Von Mises, puis le passage dans le plan t, ψ, où t est défini par :

$$t = \int_0^x \sqrt{C_f}\, d\xi \qquad (5.35.)$$

En introduisant la variable de vitesse :

$$Z = U_e^{*2}(x) - u^{*2}(x,\psi) \qquad (5.36.)$$

le système d'équation s'écrit :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} = \left[\frac{u^*}{(2\tau_p^*)^{1/2}} - \psi^{1/2} \right] \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} \qquad (5.37a)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{1/2} \frac{\partial m}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u^*}{(2\tau_p^*)^{1/2}} - \psi^{1/2} \right) \frac{\partial m}{\partial \psi} \right] \qquad (5.37b)$$

avec les conditions aux limites, qui s'écrivent dans le système (x,ψ)

$$x \to 0 \qquad Z \to 0 \qquad m \to 1 \qquad (5.38a)$$

$$\psi \to \infty \qquad Z \to 0 \qquad m \to 1 \qquad (5.38b)$$

$$\psi \to 0 \qquad Z \to U_e^2(x) \qquad (5.38c)$$

$$\lim_{\psi \to 0} \frac{u^*}{Sc} \frac{\partial m}{\partial \psi} = \frac{k(\rho C_e)^{n-1}}{D} \frac{\nu}{U_e} \lim_{\psi \to 0} m \qquad (5.38d)$$

τ_p^*, contrainte adimensionnelle, est identique à $\frac{C_f}{2}$.

La résolution s'opère par approximations successives. La première approximation consiste à annuler les termes de droite (ce qui correspond à identifier le profil de vitesses à son asymptote à la paroi). On résout alors le système sans second membre. Reportant alors la valeur trouvée dans le second membre, on résout alors de nouveau le système. La $i^{\text{ième}}$ approximation consiste à résoudre le système (5.37.)+(5.38.) avec la solution de la $(i-1)^{\text{ième}}$ approximation dans le second membre.

La première approximation est résolue entièrement dans [45]. Il y est également montré que la seconde approximation améliore la précision des résultats lorsque le gradient de pression n'est plus négligeable.

Le résultat essentiel de la première approximation est l'équation intégrale permettant de calculer $m(\psi,t)$.

Introduisant la variable $\Psi = 1-m(\psi,t)$, Ψ est alors solution de :

$$\Psi(t,\psi) = \int_0^t \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\alpha}{t-t'}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} d\left[\Psi_w(t')\right] \qquad (5.39.)$$

où ψ_w est la valeur pariétale de Ψ et

$$\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^2 Sc\psi^{3/2} \qquad (5.40.)$$

$$\Psi_w(t) = \frac{Sc^{2/3}}{2^{1/6}3^{1/3}\Gamma^{2/3}} \int_0^t (t-t')^{-2/3} \frac{\phi_w^*(t')}{|\tau_w^*(t')|^{1/2}}\, dt' \qquad (5.41.)$$

Notons ici que ϕ_w^*, flux adimensionnel, est en fait un nombre de Stanton. Donc m_w se calculera en résolvant (5.41.), où ϕ_w^* sera remplacé par sa valeur :

$$\phi_w^* = \frac{J_w}{U_e(C_e - C_w)\rho} = \frac{k(\rho C_e)^{n-1} m_w^n}{U_e(1-m_w)} \qquad (5.42.)$$

Pour une plaque plane, on peut écrire :

$$m_w(x^*) = 1 - \frac{E}{4\Gamma(4/3)\Gamma(2/3)} \times \frac{1}{\sqrt{x^*}} \int_C \left|1-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{3/4}\right|^{2/3} \phi_w^*\, d\xi \qquad (5.43.)$$

L'intégrale sur C signifie que ϕ_w^* est pris sous sa forme tout à fait générale, pouvant comprendre des discontinuités et des réactions d'ordres quelconques. E est un coefficient proportionnel à la cinétique et au nombre de Schmidt.

Ayant calculé $\Psi(t,\psi)$ par (5.43.), on peut obtenir les profils par (5.39.). Nous nous limiterons ici à la première approximation.

Lassau propose, pour la résolution de (5.43.) de diviser l'espace de paroi à étudier en N petits intervalles, où l'on puisse approximer $m_w(x^*)$ par des polynomes de degré q ; par exemple, entre le $(i-1)^e$ et le i^e élément, on écrit :

$$m_{w_i} = a_i + b_i x^{*q} \qquad (5.44.)$$

Le calcul étant effectué de proche en proche, nous détaillerons plus loin un calcul de ce type. Précisons que ce mode de résolution exige le calcul numérique du système de 2N intégrales, M_i et N_i, de la forme :

$$M_i = \int_{x_i-1}^{x_i} \left|1 - \left(\frac{\xi}{x_i}\right)^{3/4}\right|^{-2/3} d\xi$$

$$N_i = \int_{x_i-1}^{x_i} \left|1 - \left(\frac{\xi}{x_i}\right)^{3/4}\right|^{-2/3} \xi^q\, d\xi \qquad (5.45b)$$

5.2bd. Nous ne citerons que pour mémoire la méthode intégrale de Chung [52] qui permet, dans le cas de la plaque plane au 1er ordre, une expression analytique approchée de $m_w(x)$.

5.3. CALCUL DES CONCENTRATIONS PARIETALES

Cette revue bibliographique nous montre que trois méthodes peuvent nous donner $m_w(x)$ dans le cas d'un échelon de catalyse avec réaction d'ordre quelconque.

- La méthode décrite en 5.2ab et annexe 4. Elle conduit à un calcul numérique compliqué par la présence d'une fonction $M(x,x_0)$ qui n'est pas connue analytiquement.

- La méthode de superposition (décrite en 5.2ac). Elle est particulièrement adaptée à notre cas, puisqu'elle s'attache particulièrement au transfert pariétal. Elle conduit à la résolution d'une équation intégrale.

- La méthode 5.2b a conduit, nous le verrons, à une équation similaire à celle de la méthode précédente.

- La méthode 5.2bc. est la plus complète. Elle permet le calcul des profils avec une vitesse à l'infini variable. Dans les cas de répartitions complexes de catalyseur, elle donne la marche du calcul numérique à adopter. Toutefois, son application demande, dans le cas général, la connaissance d'une série de 2N intégrales.

5.3a. Certaines méthodes conduisent à la résolution d'une équation intégrale de Volterra. En ce qui concerne les deux dernières citées, une méthode générale consiste à remplacer la courbe inconnue par une suite de courbes polynomiales, d'équation :

$$m_i = a_i + b_i\, x^q \qquad (5.46.)$$

- nous avons déjà rencontré cette méthode en 5.2bc.
- Chung [38] utilise l'exposant $q = 3/4$,
- Chambre et Acrivos [41] utilisent une approximation linéaire ($a_i = 0$, $q = 1$).

AUTEURS	Réf. Texte	Principe	Hypothèses	Caractéristiques Cas d'application
FRANK KAMENETSKII	5.2a a	Invariance du coefficient de convection	Connaissance du transfert à C_w constante	Méthode approximative
ROSNER	5.2a b	Conservation de la relation entre Stanton et épaisseur de diffusion.		Méthode quasi-quasi stationnaire Prolongement possible au cas d'un échelon (A4)
CHAMBRE	5.2a c	Superposition de solutions à C_w constante. Equation intégrale		- formellement exacte - utilisable en turbulent - valable pour un échelon de catalyse
CHAMBRE ACRIVOS	5.2b a	Solution de la forme : $m(\xi,\eta) = Z(\xi)\ Y(\eta)$	Similarité des vitesses Pas de gradient de pression	Convergence de séries lentes Rayon de convergence fini pour $n \neq 1$ Permet le calcul des profils
CHAMBRE ACRIVOS LIGHTHILL	5.2b b	Equation intégrale	Profil de vitesses ramené à son asymptote à la paroi (Sc grand)	Donne une équation intégrale pratiquement identique à 5.2ac
LASSAU	5.2b c	Méthode par approximations successives	1ère approximation: Profil de U remplacé par son asymptote	- Permet un gradient de pression - Donne les profils - Permet une répartition quelconque du catalyseur - Propriétés physiques constantes.

Les principales méthodes de résolution

C'est une méthode de ce dernier type que nous allons utiliser. Toutefois, nous effectuerons un calcul à la fois plus simple et plus précis que celui de [41], en utilisant des intégrales déjà tabulées. Nous testerons la validité de ce calcul en comparant certaines valeurs à celles relevées dans [45]. Chambre et Acrivos [40] proposent aussi une méthode de résolution par séries de l'intégrale de Volterra du type 5.20. Nous y reviendrons en 5.4.

5.3b. Le choix d'un noyau

Nous allons calculer $m_w(x)$ à partir de l'équation (5.16.). En régime laminaire, le noyau le plus utilisé provient du coefficient de convection pour le chauffage à température constante proposé par Eckert [4] :

$$h(x,x_0) = \frac{\Theta\ R_x^{1/2}}{\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}} \qquad (5.47.)$$

Cette expression est de la forme (5.18.) où p = 0,5.

(5.17.) prend alors, d'après (5.20.), la forme :

$$\boxed{m_w^n(z) = -\frac{1}{\sqrt{z}} \int_{z_0}^{z} \frac{dm_w(\zeta)}{\left[1-\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{3/4}\right]^{1/3}}} \qquad (5.48.)$$

avec la condition

$$z < z_0 \quad ; \quad m_w = 1 \qquad (5.49.)$$

Notons que cette expression est formellement identique à celle trouvée par Chambre et Lighthill. Seule la valeur de Θ varie :

- Eckert suppose une similitude des profils, Θ est alors égal à $0{,}332\ Sc^{1/3}$,
- Lighthill utilise la transformation de Laplace, il trouve $0{,}339\ Sc^{1/3}$,
- Citons aussi l'expression donnée par Merck [47] de la forme : $0{,}3387\ Sc^{1/3}\ (1 - 1/45\ Sc + \ldots)$, qui donne ici : $0{,}338\ Sc^{1/3}$.

Nous choisirons la valeur d'Eckert en raison de sa coïncidence avec le résultat de Polhausen pour z_0 nul.

5.3c. La résolution de 5.46.

Divisons l'intervalle z_0, z en N intervalles égaux. Appelons z_1, z_2, ... z_i les extrémités des intervalles correspondants (fig. 5.2.).

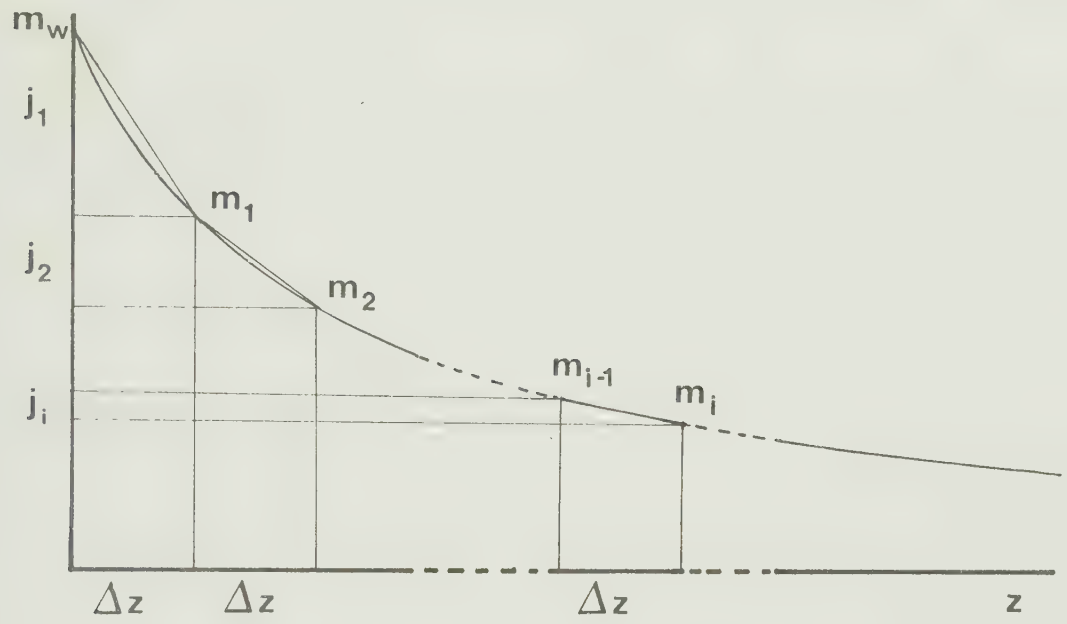


Fig. 5.2.

(5.48.) s'écrit :

$$m_w^n = \frac{-1}{\sqrt{z}} \sum_{i=1}^{N} \int_{z_{i-1}}^{z_i} g\left(\frac{\zeta}{z}\right) \, dm_w(\zeta) \qquad (5.50.)$$

la forme de $g\left(\frac{\zeta}{z}\right)$ se déduit clairement de (5.18.) et (5.47). Dans chacun de ces intervalles, (z_{i-1}, z_i), remplaçons $m_w(z)$ par un segment de droite.

Définissons

$$\Delta z = z_i - z_{i-1} \qquad (5.51a)$$

$$m_i = m_w(z_i) \qquad (5.51b)$$

$$j_i = m_i - m_{i-1} \qquad (5.51c)$$

On a alors :

$$m_k = 1 + \sum_1^k j_i \qquad (5.52.)$$

(5.50.) devient :

$$(1 + \sum_1^k j_i)^n = - \frac{1}{\sqrt{z_k}} \sum_{i=1}^k \frac{j_i}{\Delta z} \int_{z_{i-1}}^{z_i} g\left(\frac{\zeta}{z_k}\right) d\zeta \qquad (5.53.)$$

Hartnett [11], dans un calcul simplifié des flux thermiques pariétaux, a rencontré des expressions similaires au second membre (5.53.). Il a tabulé la fonction :

$$G(x) = \int_0^x g(\Psi)\, d\Psi \qquad (5.54.)$$

Il apparaît clairement que :

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} g\left(\frac{\zeta}{z_k}\right) d\zeta = z_k\, \Gamma_i^k \qquad (5.55a)$$

où

$$\Gamma_i^k = G\left(\frac{x_i}{x_k}\right) - G\left(\frac{x_{i-1}}{x_k}\right) \qquad (5.55b)$$

Notons que Hartnett a tabulé la fonction G(x) pour les formules d'Eckert, en laminaire, de Rubesin [12] et de Seban [13] en turbulent. La méthode que nous présentons ici est donc déjà, de ce point de vue, applicable à un calcul en turbulent (chapitre 7).

L'expression qui permet le calcul s'écrit en définitive

$$\boxed{(1 + \sum_1^k j_i)^n = - \sqrt{z_k} \sum_{i=1}^k \Gamma_i^k \frac{j_i}{\Delta z}} \qquad (5.56.)$$

Remarquons que, aux ordres 0 et 1, cette équation prend une forme remarquablement simple :

$$n = 0 \qquad \sqrt{z_k} \sum_{1}^{k} j_i \frac{\Gamma_i^k}{\Delta z} = -1 \qquad (5.57a)$$

$$n = 1 \qquad \sum_{1}^{k} j_i \left(1 + \frac{\Gamma_i^k \sqrt{z_k}}{\Delta z}\right) = -1 \qquad (5.57b)$$

Notons enfin que nous avons ici N intervalles égaux Δz. Il est évident que la méthode est applicable au cas de N intervalles égaux, de longueur Δz_i. Il suffit alors de remplacer, dans les expression (5.56.) et (5.57.), Δz par Δz_i.

5.3d. L'intérêt du procédé de calcul

Il peut à priori paraître inutile de mettre au point une nouvelle méthode de calcul pour retrouver des résultats déjà calculables par ailleurs [45].

Toutefois, il nous a paru intéressant de développer ce calcul pour diverses raisons :

- Le principe de superposition permet le calcul du flux pariétal en ne connaissant que le coefficient de convection (5.6.).

- Le calcul de m_w à partir de (5.56.), d'autant plus simple que les fonctions G(x) sont déjà connues.

- Dans tous les cas où on ne dispose pas de moyens de calculs puissants que nécessite le calcul d'intégrales telles que les M_i et N_i du paragraphe 5.2bc. La présente méthode permet des calculs avec une bonne précision, c'est d'ailleurs la raison qui nous a amenés à développer ce calcul [56].

Les premières courbes [56] calculées par cette méthode l'ont été à l'aide d'une Programma 101. Les courbes de la fig. (5.3.) ont été obtenues à l'aide d'un calculateur Hewlett-Packard, modèle 10. Cette machine ne possédant pas suffisamment de mémoires pour contenir le tableau des valeurs de G(x) tiré de [11], nous avons cherché une forme analytique susceptible de rendre compte des valeurs de G(x) : nous avons trouvé que l'expression :

$$G_1(x) = 1{,}94 - \sqrt{\frac{1{,}03-x}{0{,}29-0{,}03|x-0{,}6|}} \qquad (5.58.)$$

donne une très bonne approximation des valeurs relevées dans [11]. Le tableau 5.1. compare quelques unes de ces valeurs avec celles données par (5.58.). Nous les comparons également aux résultats d'une approximation plus simple :

$$G_2(x) = 1{,}94 - \sqrt{\frac{1{,}03-x}{0{,}28}} \qquad (5.59.)$$

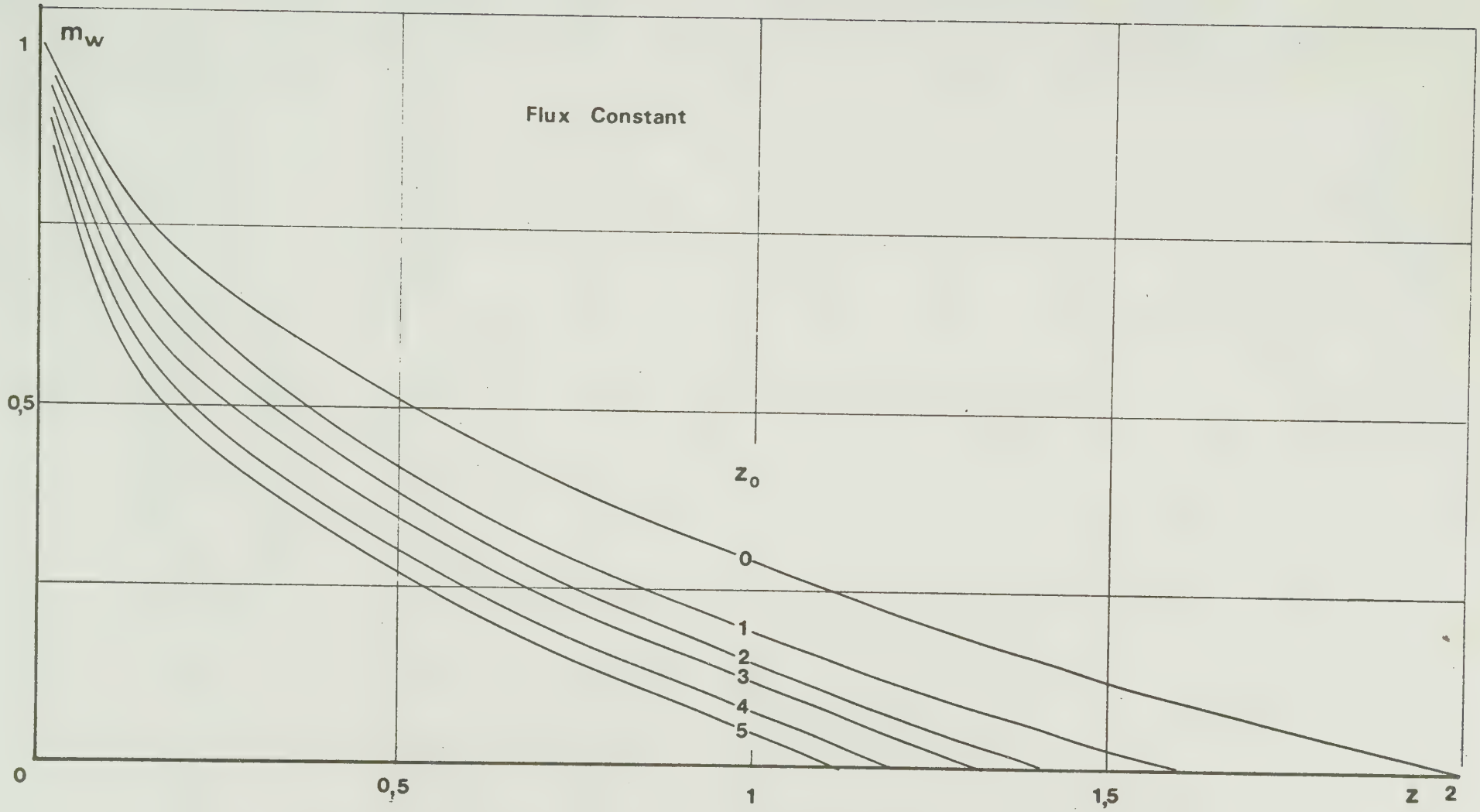


Fig. 5.3. : Répartition de concentrations réduites pariétales calculées pour une réaction d'ordre 0. Influence d'un échelon

z	G(x) Valeurs tabulées par Hartnett	$G_1(x)$ Formule (5.58.)	G_2 Formule (5.59.)	G_3 Formule (5.60.)
0,1	0,104	0,101	0,096	0,117
0,2	0,213	0,212	0,207	0,218
0,3	0,329	0,3282	0,331	0,325
0,4	0,451	0,4506	0,468	0,44
0,5	0,582	0,5811	0,62	0,56
0,6	0,722	0,7223	0,785	0,701
0,7	0,876	0,8677	0,964	0,854
0,8	1,049	1,401	1,158	1,034
0,9	1,257	0,1259	1,364	1,1259
1	1,612	1,6115	1,585	1,613

Tableau 5.1.

Notons que ces approximations sont nettement meilleures (tableau 5.1.) que celles proposées par Hartnett :

$$G_3(x) = 0,895\ x + 0,69\ x^2 \qquad (5.60.)$$

L'intérêt de cette méthode réside dans les faibles moyens de calcul qu'elle exige. Toutefois, ayant un grand nombre de courbes à calculer, nous avons utilisé un ordinateur, ce qui nous a permis également d'obtenir un plus grand nombre de points par courbe. Mr Mauconduit en a assuré la programmation.

5.4. RESULTATS DU CALCUL

La figure (5.3.) montre des courbes à flux constant pour diverses valeurs de l'échelon en abcisses réduites, z_0. Notons que pour $z_0 = 0$, la correspondance est très bonne avec la valeur calculée par Rosner (Annexe 4) :

$$m_w(z) = 1 - \sqrt{\frac{z}{2}} \qquad (5.61.)$$

La figure (5.4.) donne les concentrations pariétales sans échelon pour des ordres de 1/2 à 4 pour z variant de 0 à 25.

La figure (5.5.) dilate l'origine de ces courbes pour z entre 0 et 0,2.

L'influence de l'échelon est montrée sur les courbes suivantes, pour z_0 variant de 0 à 30, à l'ordre 1 (fig. 5.6.), à l'ordre 1/2 (fig. 5.7.) et à l'ordre 2 (fig. 5.8.).

Il était indispensable de comparer les résultats de ce calcul à d'autres méthodes. Nous le faisons au premier ordre en comparant nos points aux courbes calculées par Lassau [45]. On met ainsi en évidence sur la figure (5.9.) l'importance de la grandeur du pas. On voit que pour un pas de 0,05 z_0, la comparaison est très satisfaisante. On peut remarquer également que l'erreur s'amenuise avec z, donc n'est pas cumulative.

Des auteurs présentent $m_w(z)$ sous la forme d'une série [40] [45]. La convergence est en général lente. Nous constatons ce fait sur deux exemples dans le cas d'un ordre un sans échelon de catalyse.

Lassau trouve la solution de (5.43.) sous la forme :

$$m_w(\sqrt{z}) = \sum_n (-1)^n \left[\frac{3}{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\right]^n \frac{\Gamma\left[\frac{2}{3}(n+1)\right]}{\Gamma(2/3)} \frac{\sqrt{z}^n}{n!} \qquad (5.62.)$$

Chambre et Acrivos [40] proposent une série dont les premiers termes sont :

$$m(\sqrt{z}) = 1 - 0{,}731\sqrt{z} + 0{,}453\, z - 0{,}252\, z^{3/2} + \ldots \qquad (5.63.)$$

Le tableau (5.2.) compare nos résultats avec ceux donnés par les 6 premiers termes de (5.60.) et les 3 premiers de (5.61.). Il est intéressant de remarquer qu'un calcul sur peu de termes mène rapidement à des erreurs importantes. Les valeurs exactes [45] sont portées dans le même tableau.

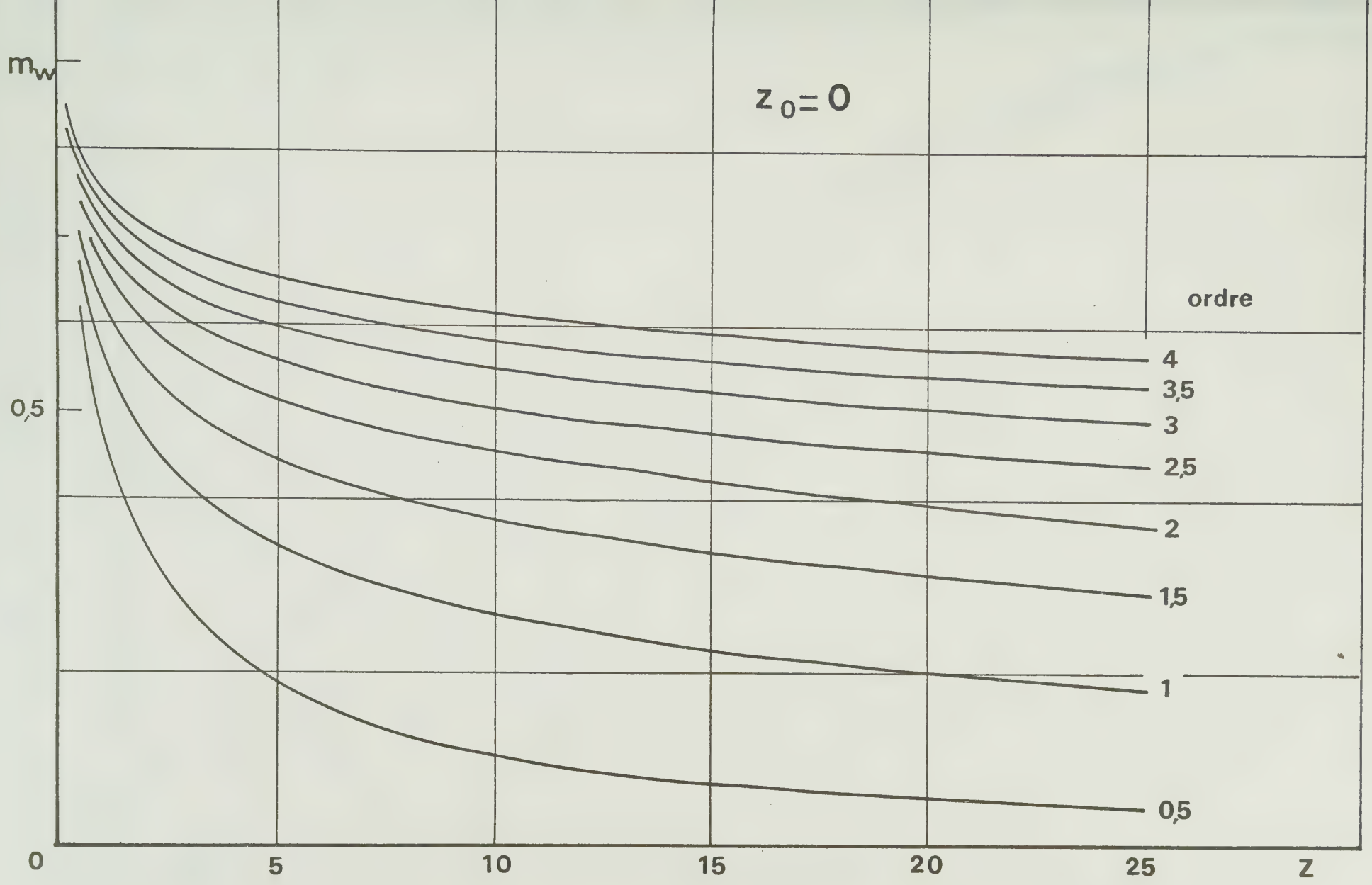


Fig. 5.4. : Profils de concentration pariétale
calculés pour divers ordres

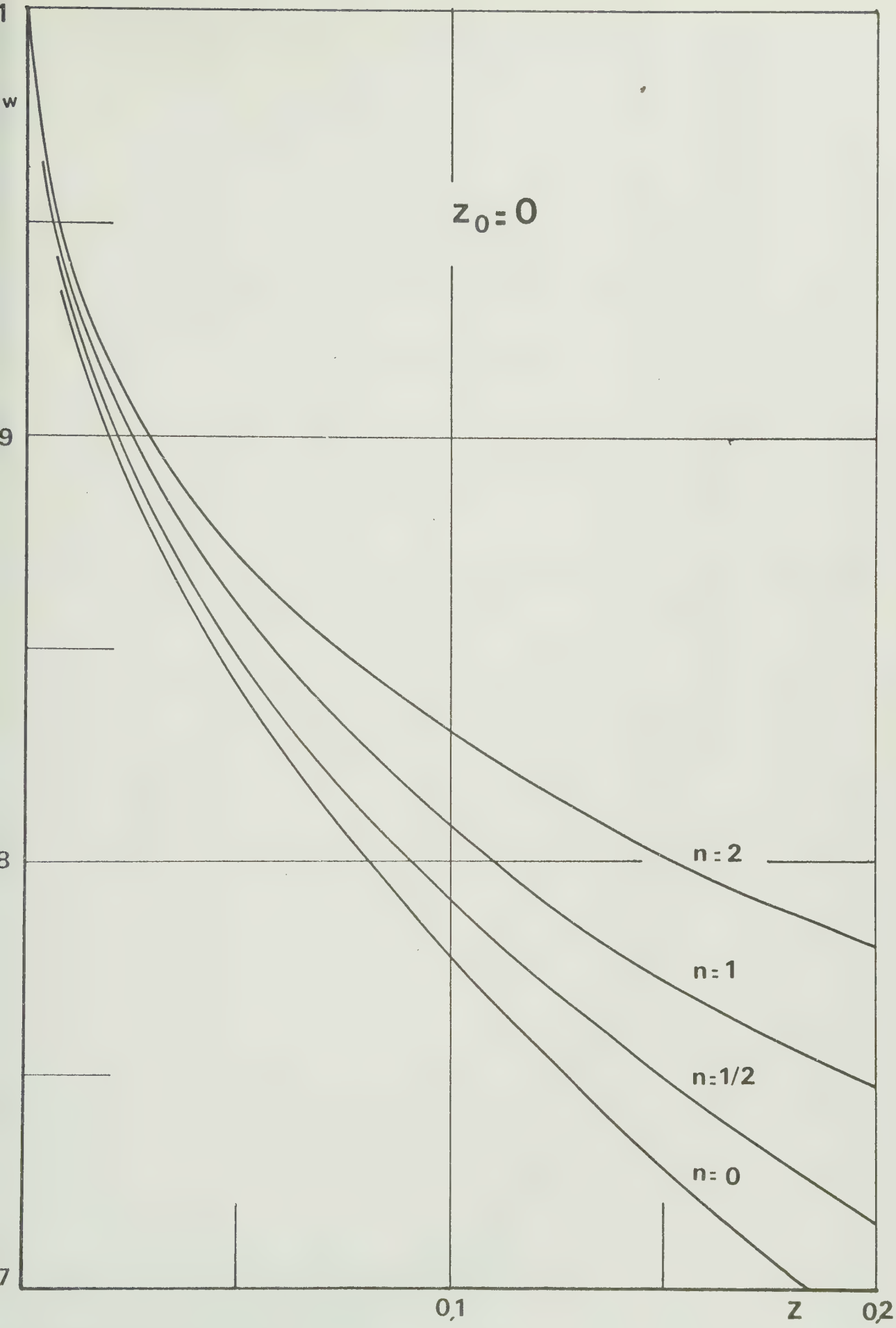


Fig. 5.5. : Profils de concentration pariétale
au voisinage immédiat du bord d'attaque
calculés pour divers ordres

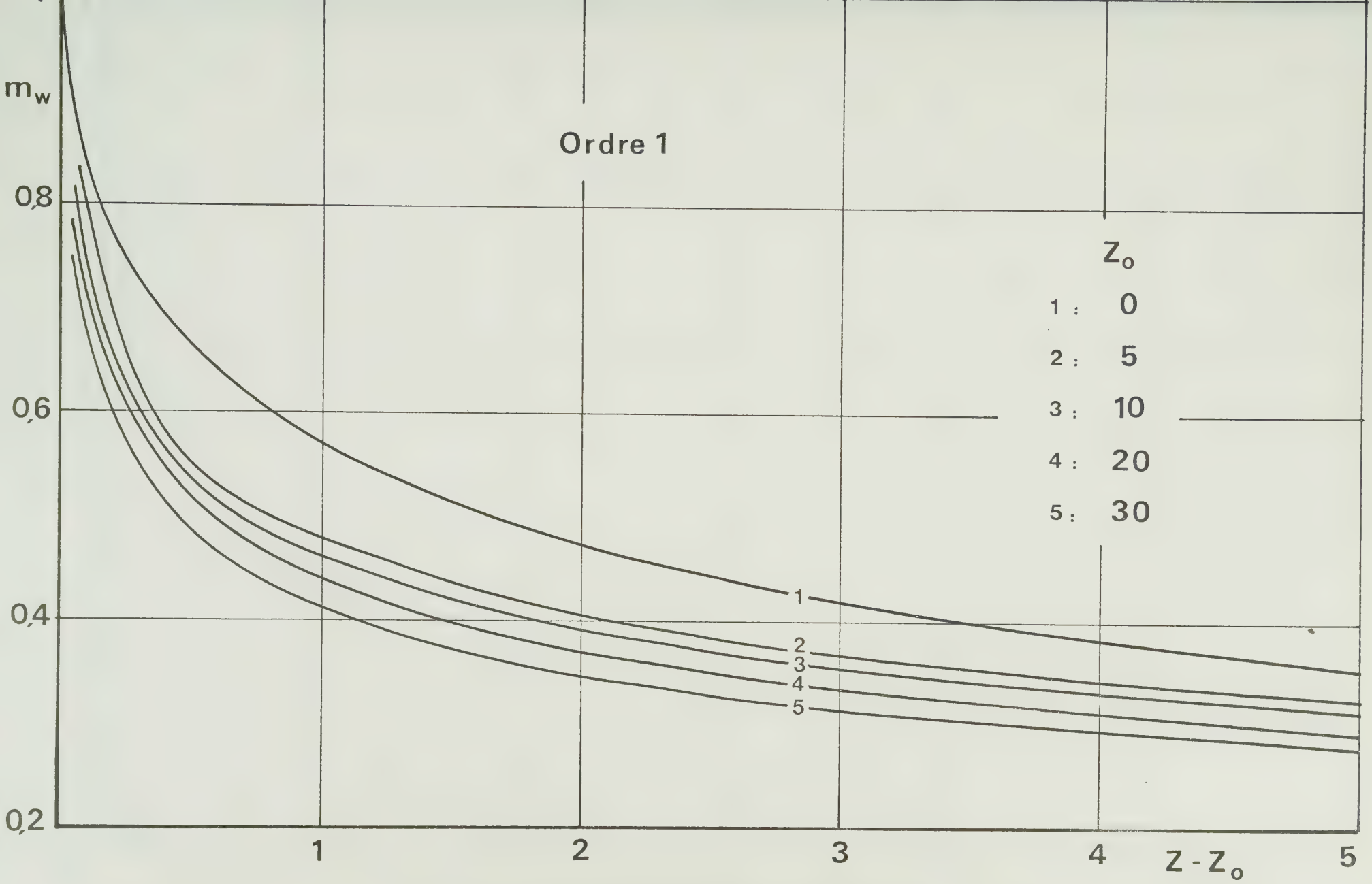


Fig. 5.6. : Influence de l'échelon de catalyse :
profils calculés à l'ordre un

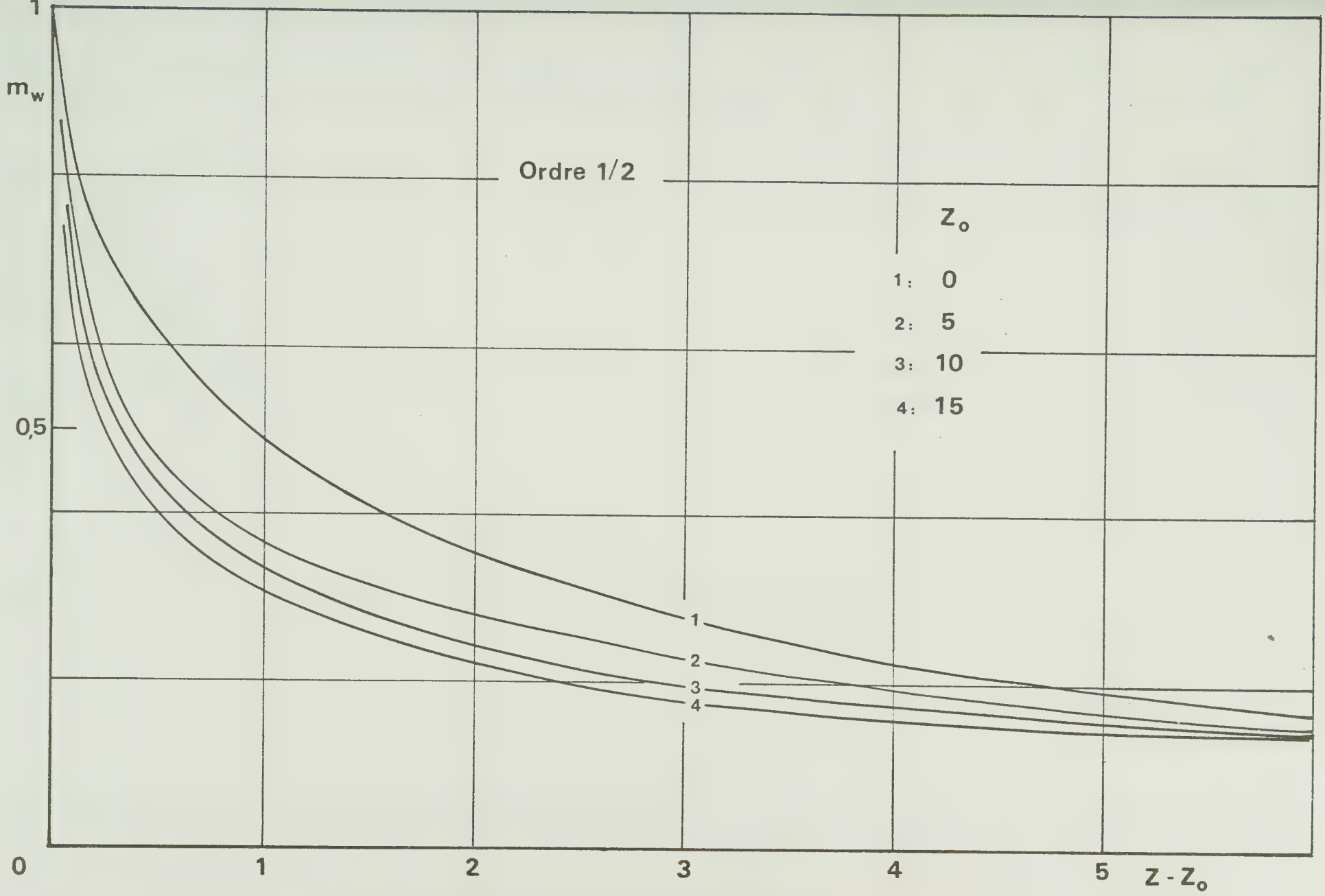


Fig. 5.7. : Influence de l'échelon de catalyse :
profils calculés à l'ordre 1/2

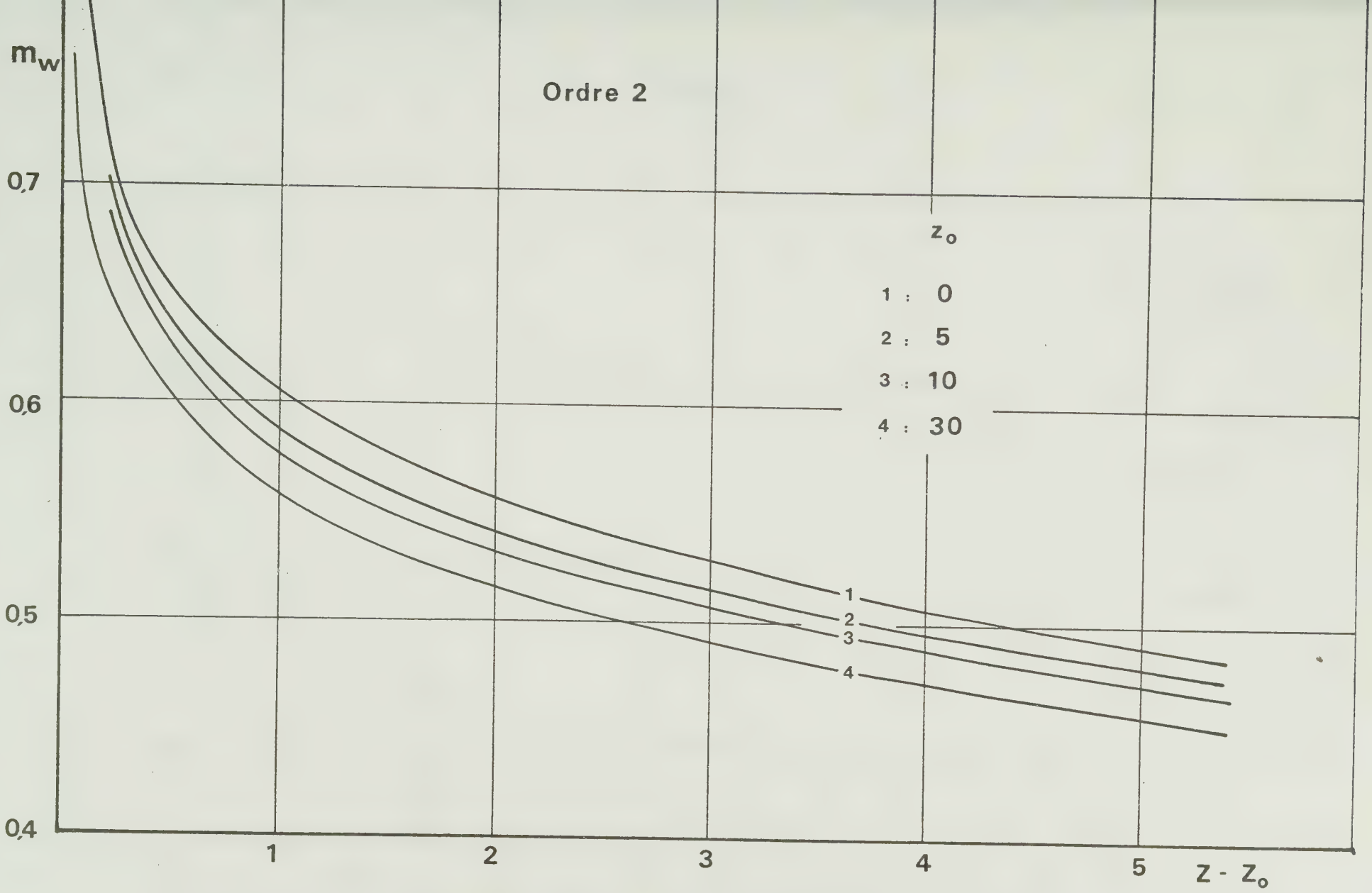


Fig. 5.8. : Influence de l'échelon de catalyse :
profils calculés à l'ordre 2

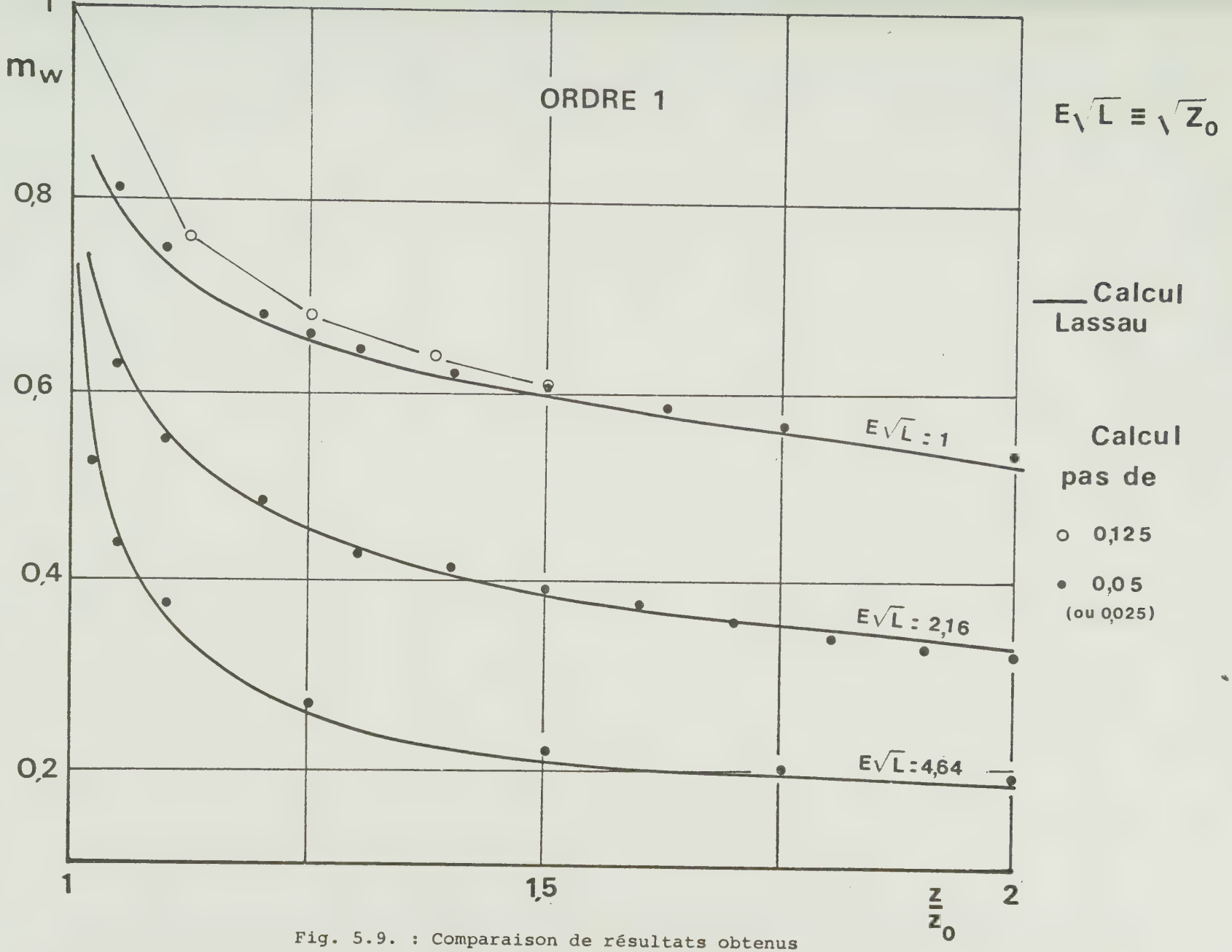


Fig. 5.9. : Comparaison de résultats obtenus à ceux tirés de [45]

z	Calcul par (5.56.)	Pas de calcul	Calcul (5.62.) 6 premiers termes de la série	Calcul (5.63.)	Valeurs exactes [45]
0,05	0,857	0,2/80	0,858	0,856	0,858
0,1	0,805	id	0,811	0,806	0,811
0,15	0,773	id	0,779	0,77	0,779
0,2	0,747	id	0,754	0,741	0,754
0,5	0,695	de	0,665	0,62	0,67
1	0,615	0,5	0,603	0,47	0,61
1,5	0,53	à	0,602	0,32	0,52
2	0,483	7	0,661	0,16	0,475
3	0,424	id	1,03	- 0,21	0,42
5	0,355	id	3,37	- 1,19	0,35
12	0,256	id	49,6	- 6,57	0,245
19	0,208	id	42,6	-14,45	0,21
25	0,185	id	505,3	-22,8	0,18

Tableau 5.2. : Concentrations réduites pariétales à l'ordre un sans échelon : Comparaison de différents calculs.

5.5. COMPARAISON AVEC LES PROFILS EXPERIMENTAUX

Nous avons tracé nos courbes expérimentales en variable réduite ; z a été, pour chaque point, calculé d'après (1.21.) où θ est affecté de la correction $\bar{\sigma}$ définie au chapitre 3.

Les profils ainsi déterminés sont confrontés aux courbes issues du précédent calcul.

On constate sur les figures (5.10.) à (5.12b) que l'accord est généralement bon, sauf au voisinage de l'échelon (c'est-à-dire sur les premiers éléments du "catalyseur").

Nous pouvons attribuer ce désaccord à plusieurs causes :

1) Tout d'abord, aux erreurs expérimentales, qui agissent sur l'évaluation des paramètres entrant dans la définition de z.

Nous pouvons considérer que seuls K et U_e provoquent des erreurs notables.

- En régime laminaire, nous travaillons à de faibles vitesses, c'est-à-dire dans la partie basse de la caractéristique du diaphragme, où l'erreur est plus importante que dans la zone d'utilisation moyenne.

- L'erreur sur K peut être assimilée à l'erreur sur le flux ϕ fourni par chaque élément de chauffage. Nous l'avons chiffrée à l'annexe 1. Cette erreur va dans le sens d'une diminution de températures donc dans le sens d'une *élévation* des profils, effet contraire à celui observé ici.

- Les erreurs dues à l'introduction ne peuvent influencer que la validité des courbes théoriques. Elles ne sont donc pas de nature expérimentale.

2) D'autre part, à chaque fois qu'on remplace, dans l'expérimentation, une loi de cinétique *continue* par une loi réalisée en *moyenne* sur une longueur L, on introduit une erreur que nous avons évaluée par le calcul pour le premier élément, elle va dans le sens d'une diminution de la concentration au point x = L, par rapport à une cinétique continue, donc, rend compte du phénomène observé ici.

Cette erreur systématique peut paraître une limitation grave de la méthode analogique. Nous n'avons fait figurer ici que quatre courbes particulièrement représentatives de ce phénomène. Toutefois, nous avons effectué la même comparaison pour les autres courbes expérimentales et sur toutes, nous pouvons faire les remarques suivantes :

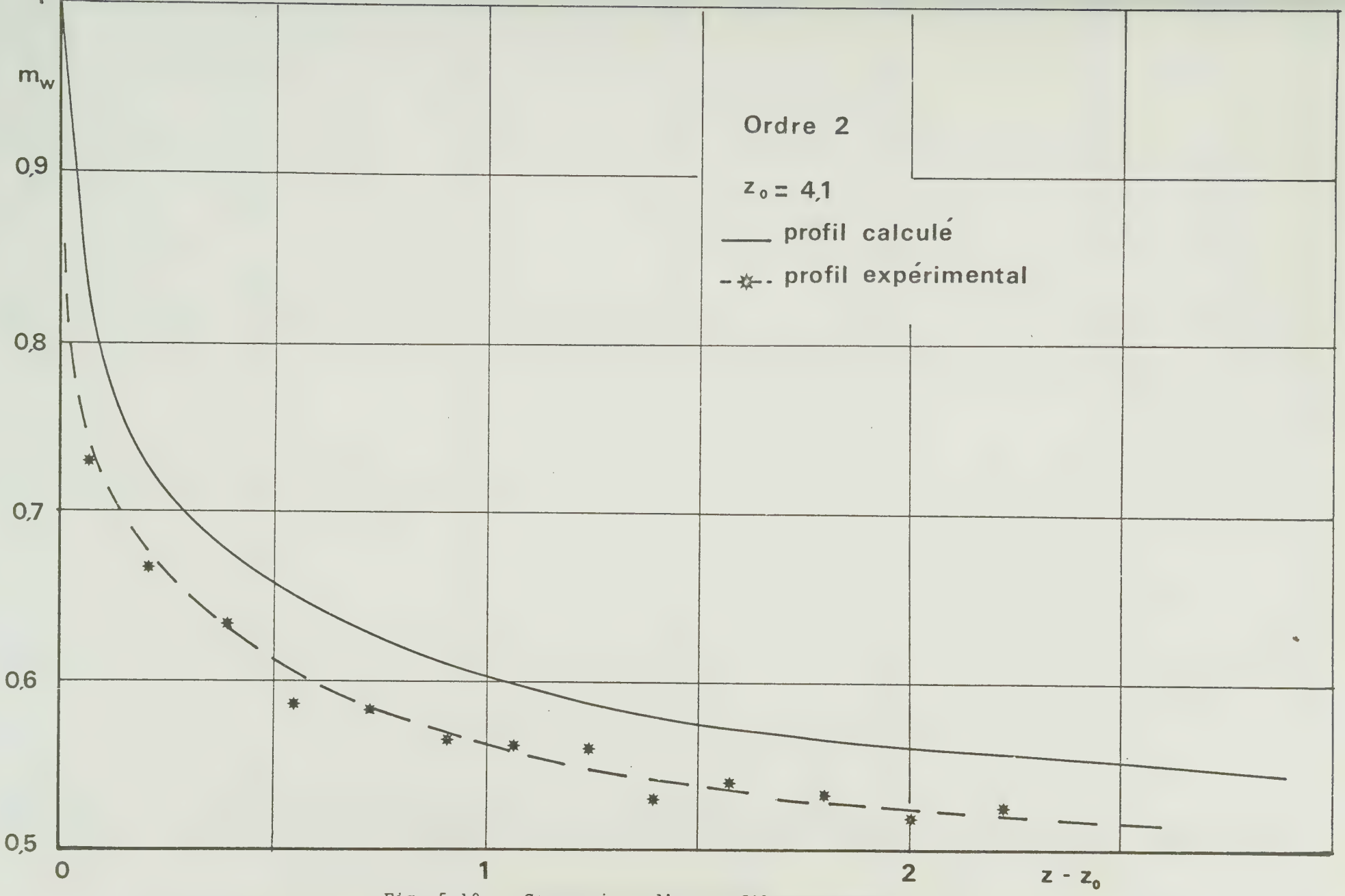


Fig. 5.10. : Comparaison d'un profil expérimental
et du profil calculé correspondant à l'ordre 2

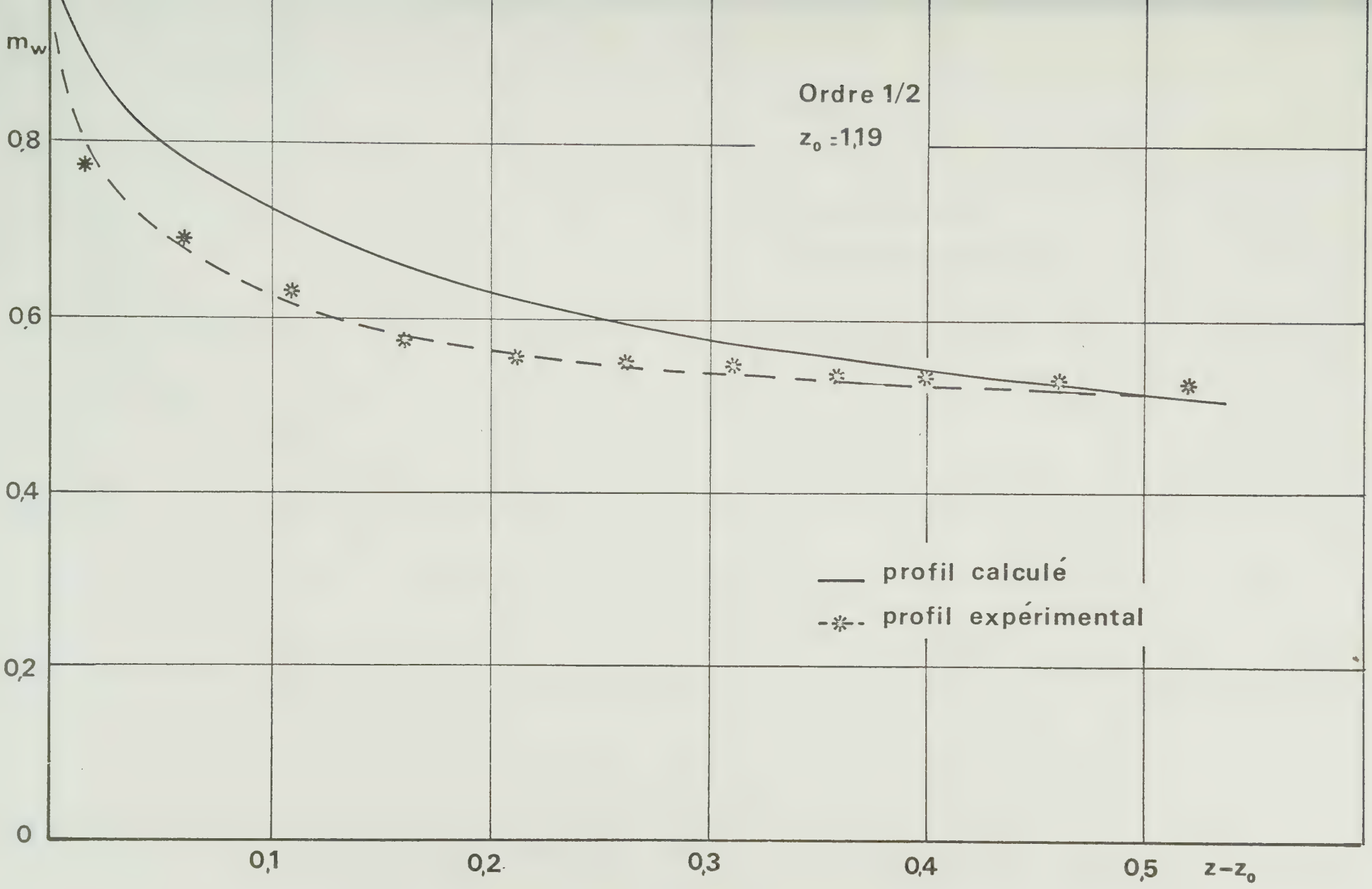


Fig. 5.11. : Comparaison d'un profil expérimental
et du profil calculé correspondant à l'ordre 1/2

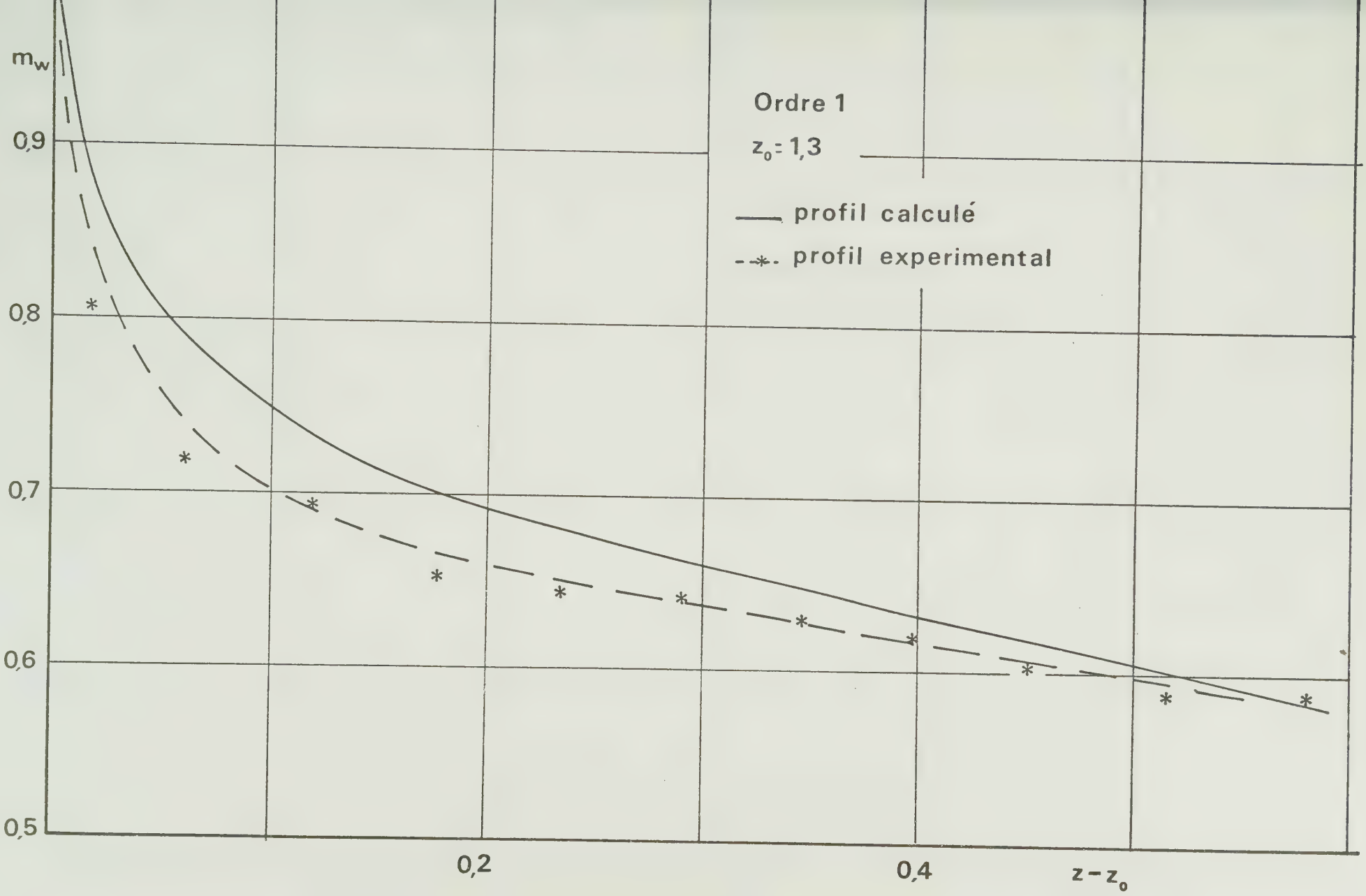


Fig. 5.12a : Comparaison d'un profil expérimental
et du profil calculé correspondant à l'ordre 1

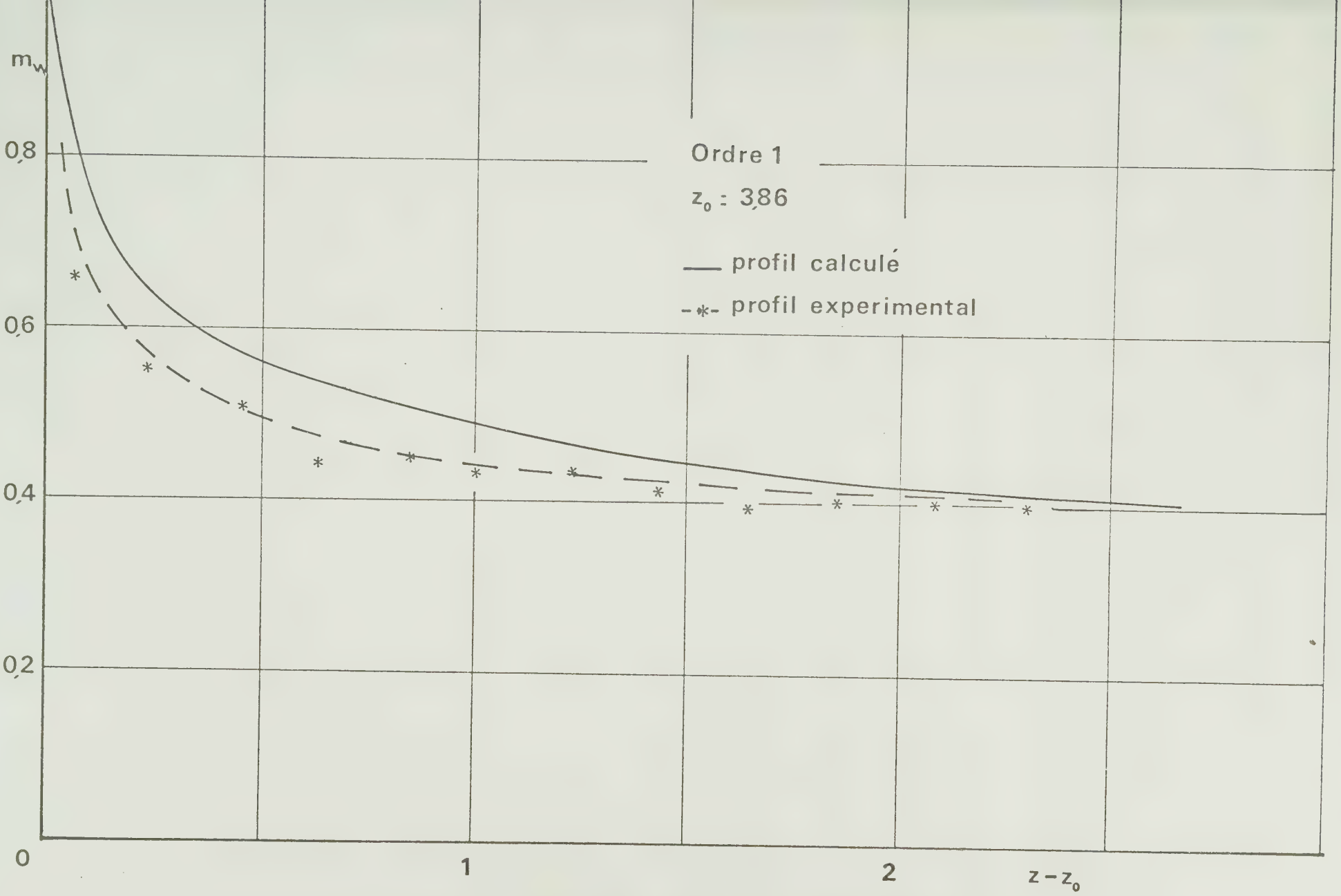


Fig. 5.12b : Comparaison d'un profil expérimental
et du profil calculé correspondant à l'ordre 1

- L'erreur est localisée en général dans une zone de l'ordre du tiers de l'échelon de catalyse (entre z_0 et 4/3 z_0).

- *Elle n'est pas cumulative*, c'est-à-dire que cette erreur n'a pas d'influence sur le reste de la répartition de flux, ce qui minimise grandement l'erreur dans le cas d'un catalyseur de grande longueur.

- Lorsqu'une bonne précision est nécessaire au voisinage de l'échelon, il faut donc construire les premiers éléments de la plus petite dimension possible : en effet, nous avons là un effet semblable à celui provoqué par le passage d'un échelon de tension à travers un dispositif à bande passante limitée. Toutefois, lorsque cela n'est pas possible, on peut envisager une correction de la forme :

$$\Delta m = + (0,1 \quad z^{0,76}) \exp(- \frac{3z}{z_0}) \qquad (5.64.)$$

Nous avons renvoyé à l'annexe 2 la justification de cette expression.

- En régime turbulent, cet effet se fait sentir aussi (chap. 7), mais sur une distance bien plus faible par rapport à la grandeur de l'échelon.

Nous pensons donc, en ce point de l'étude, que malgré les limitations dues à ce "filtrage", nous pouvons utiliser l'analogie thermique à l'aide de notre dispositif, et nous l'appliquerons donc à une étude similaire en turbulent, qui constitue le sujet du chapitre suivant.

Chapitre 6

L'étude expérimentale en régime turbulent

Nous avons, dans les chapitres précédents, traité de la diffusion forcée en régime laminaire. Ce problème a déjà fait l'objet, surtout du point de vue théorique, de nombreux travaux. Les études en régime turbulent sont beaucoup plus rares, tant du point de vue expérimental que du point de vue théorique [60]. C'est pourquoi nous avons utilisé la partie chauffante de notre modèle pour des études en régime turbulent.

Dans un premier paragraphe, nous décrirons le dispositif de mesures de vitesses, et les résultats obtenus.

Puis, comme au chapitre 4, nous examinerons l'influence des divers paramètres de la simulation.

6.1. L'ETUDE DYNAMIQUE

Pour développer une couche limite pleinement turbulente autour de notre modèle, il faut : soit augmenter la vitesse, soit faire précéder la partie chauffante d'une partie cylindrique suffisamment longue pour permettre la transition. Notre soufflerie ne permettant pas de vitesses supérieures à 50 cm/s, nous avons adopté la seconde solution.

Pour cette étude, le modèle est donc composé :

- du paraboloïde utilisé en laminaire,

- d'une partie cylindrique en PVC de 7 cm de diamètre et de 100 cm de long. Le mode de fixation dans la veine est le même qu'au chapitre 4. Le collier qui supporte les trois tiges de fixation est à 60 cm en avant de la zone "catalytique". Le montage est réalisé de manière à ce que ce collier ne forme pas d'épaisseur sur la surface,

- de la partie chauffante utilisée au chapitre 4, ainsi que la pièce constituant l'arrière du modèle (fig. 6.1.).

Tous ces éléments sont vissés les uns sur les autres.

Nous avons tenu, pour les mêmes raisons qu'au chapitre 4, à travailler aux plus faibles vitesses possibles (∿ 30 cm/s). Aussi, pour accélérer la transition, nous avons, entre le nez et la zone d'établissement, monté une couronne qui constitue, en coupe, une rugosité de 2 mm de hauteur.

6.1a Le dispositif de mesures de vitesses

Les mesures ont été effectuées à l'aide d'un anémomètre DISA 55 D05, à température constante. Nous avons branché la sortie analogique de cet anémomètre sur un voltmètre digital A.O.I.P. (VNT4.T). Un circuit à forte constante de temps, placé entre ce voltmètre et l'anémomètre nous a permis de ne mesurer que des vitesses moyennes.

La mesure des vitesses dans l'eau nécessite des sondes isolées. Nous avons utilisé une sonde DISA 55 R 15 à film chaud. Cette sonde est placée au bout d'un mandrin courbé à angle droit (DISA 55 H 22). Ce support est fixé dans un porte-sonde permettant un déplacement de 1 mm par tour de vis (gradué en 5/100 de mm), il assure la sortie des fils vers l'extérieur de la veine. L'exploration des couches limites avec ce dispositif ne peut être effectuée que dans un demi-plan vertical. Toutefois, nous ne nous sommes pas, en turbulent, posé de problème d'assymétrie.

Le porte-sonde (fig. 6.2.) est monté sur une plaque en altuglas. Cette plaque se boulonne sur une platine en altuglas. Les étanchéités sont assurées par des joints toriques. La platine est vissée à son tour sur un socle en acier soudé sur la veine. L'étanchéité est ici assurée par un joint plat. La platine et le socle sont percés de 3 trous rectangulaires afin de pouvoir recevoir la plaque porte-sonde. Le porte-sonde est décentré sur son support, ainsi on dispose de deux positions de la sonde par trou, soit au total la possibilité d'avoir six points de mesures en abcisse. Les deux trous ne servant pas sont obturés par des plaques pleines identiques à la première.

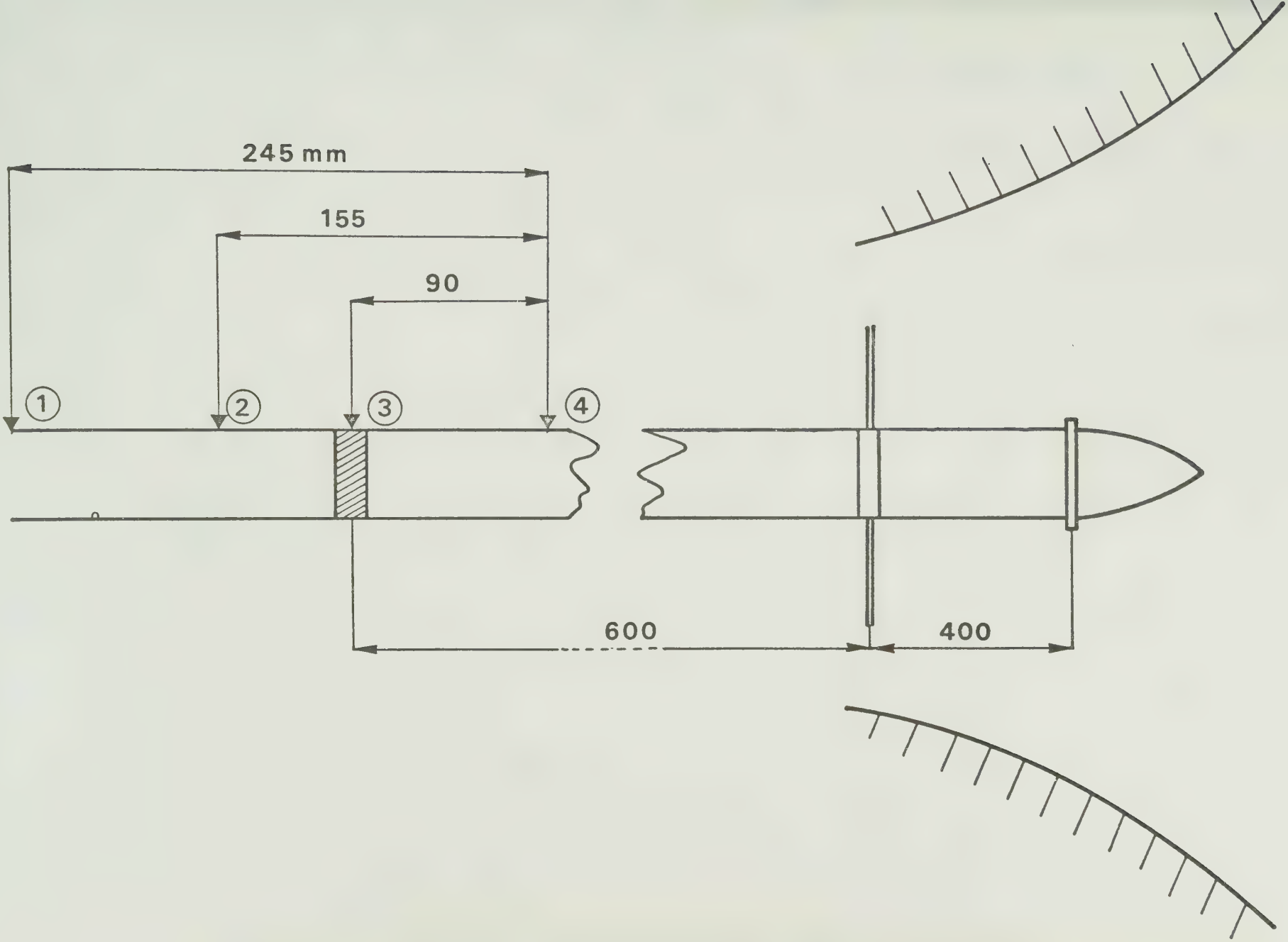


Fig. 6.1. : Position des points de mesure sur le modèle

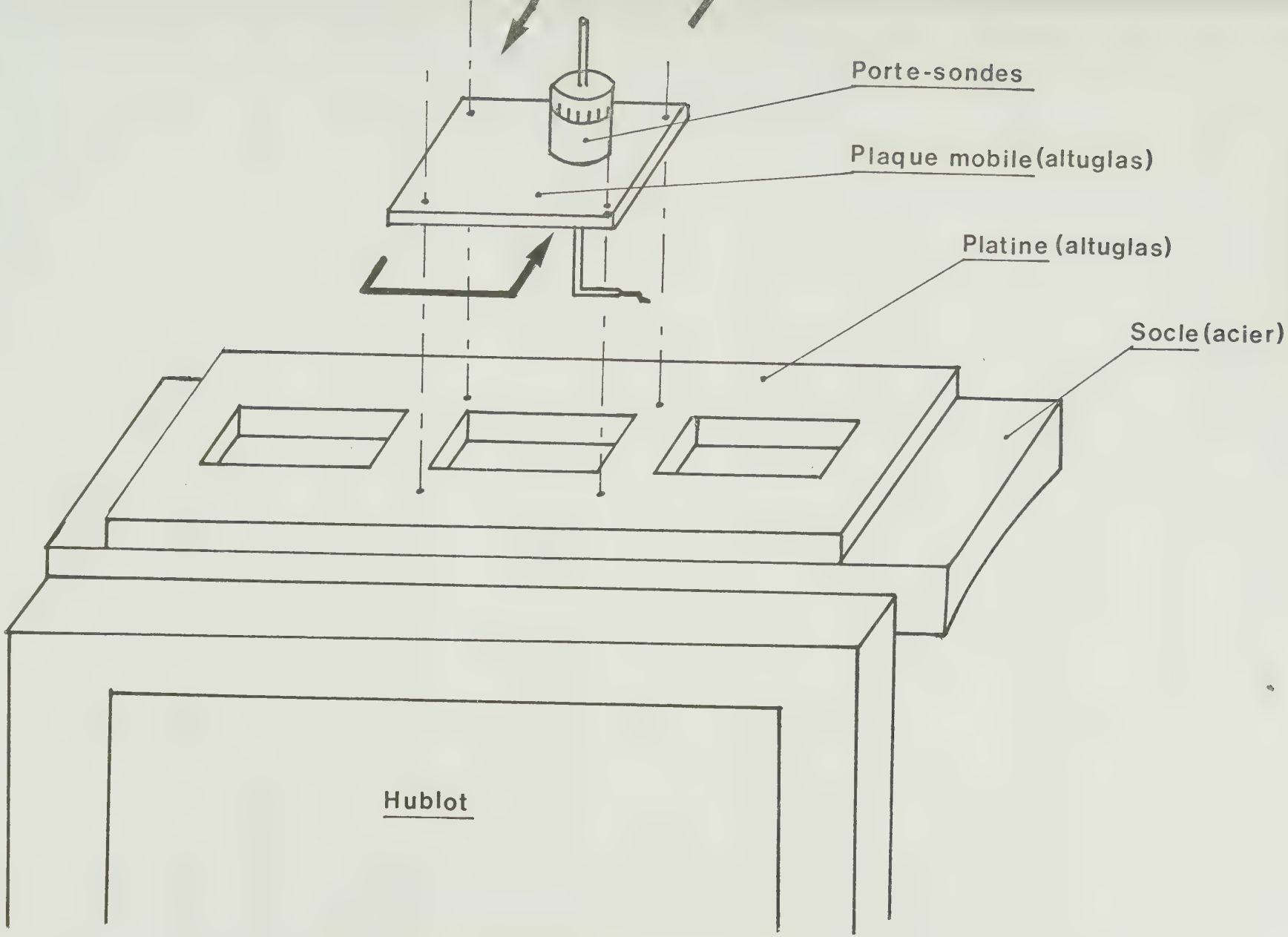


Fig. 6.2. : Le montage du porte-sonde

6.1b. Les problèmes particuliers à la mesure de vitesse

Nous avons rencontré deux types de problème :

1) ceux inhérents à l'utilisation de sonde à fil chaud, dans l'eau, en particulier une dérive importante,

2) le problème dû aux vibrations de la pompe transmises par le liquide.

1) Lorsqu'on chauffe trop la sonde, les gaz dissous dans l'eau se déposent à la surface et modifient les coefficients de transfert au voisinage du fil : la solution est classique, nous avons limité la surchauffe à une valeur de l'ordre de 1,05 [86].

- Les éléments constitutifs de la sonde sont presque tous en acier, et bien que nous ayons recouvert l'intérieur du circuit de peinture résistante aux liquides inertes, l'eau véhicule des particules d'oxyde ferrique. Celles-ci, indispensables dans le cas de l'anémométrie Doppler-Laser, provoquent ici, en se déposant sur la sonde, une modification du transfert local, donc une dérive du signal fourni par l'anémomètre. On doit ajouter à cette dérive une dérive du zéro due, entre autres à une faible variation de la température de l'eau au cours de la manipulation (quelques dizièmes de degré).

Ne pouvant supprimer les causes de cette dérive, nous les avons corrigées. On constate (fig. 6.3.) :

- que, sur une durée de l'ordre de la demi-heure, les dérives, tant du signal à vitesse constante, que du zéro, sont pratiquement linéaires.

- que, au second ordre près, la pente de cette dérive dépend peu de la vitesse.

En conséquence, on peut admettre que la réponse (tension du signal moins tension du zéro) à vitesse constante varie linéairement dans le temps. Notons que les ordres de grandeur de cette dérive sont du même ordre que ceux observés par Resett [85]. D'où le principe de la correction :

- nous admettons, suite aux constatations précédentes, que l'anémomètre se comporte comme si sa courbe d'étalonnage variait dans le temps (fig. 6.4.).

Le signal V_s sortant de l'anémomètre est donc une fonction de deux variables, la vitesse et le temps :

$$V_s = f(U_e, t) \qquad (6.1.)$$

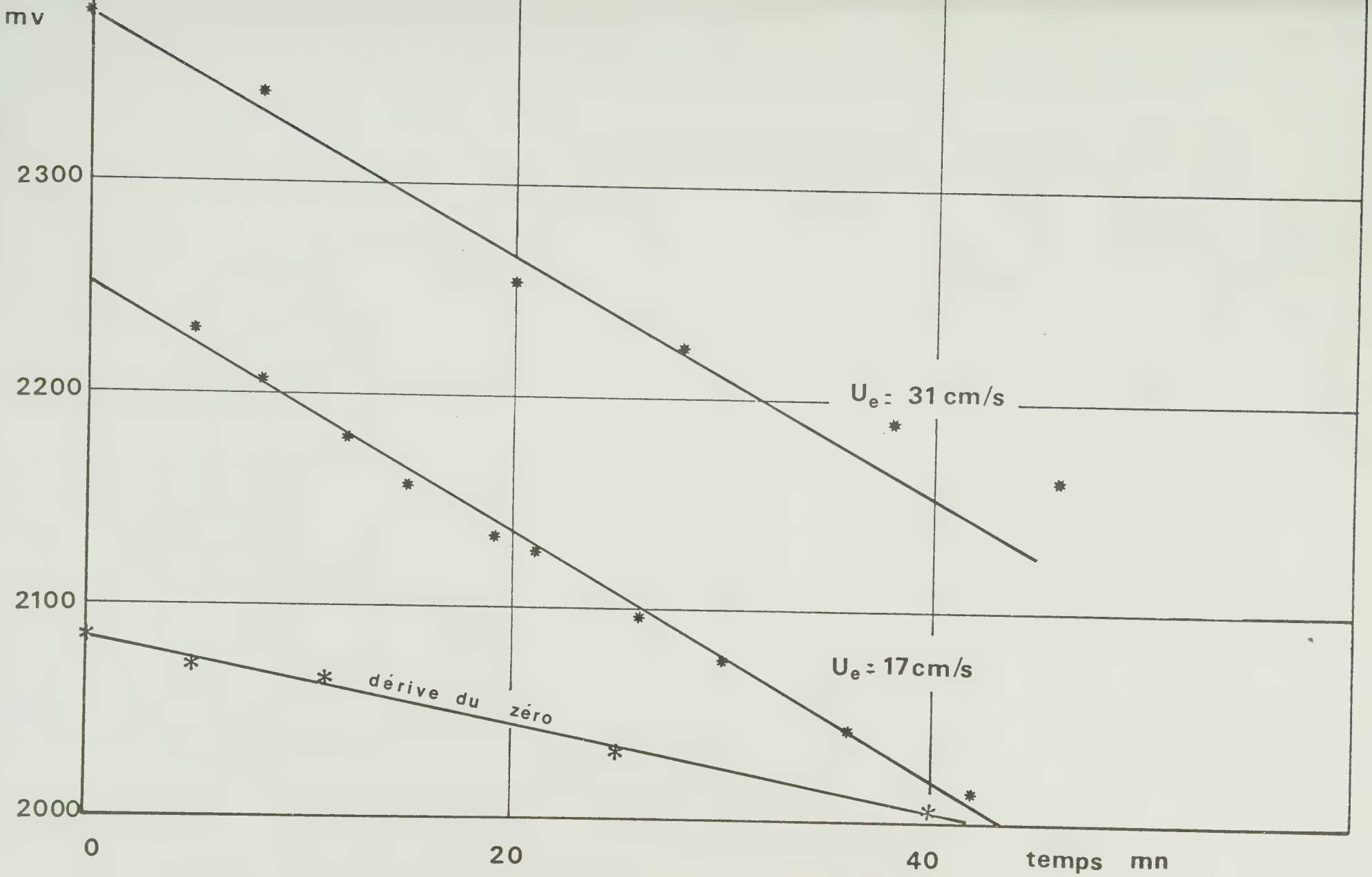


Fig. 6.3. : Etude de la dérive

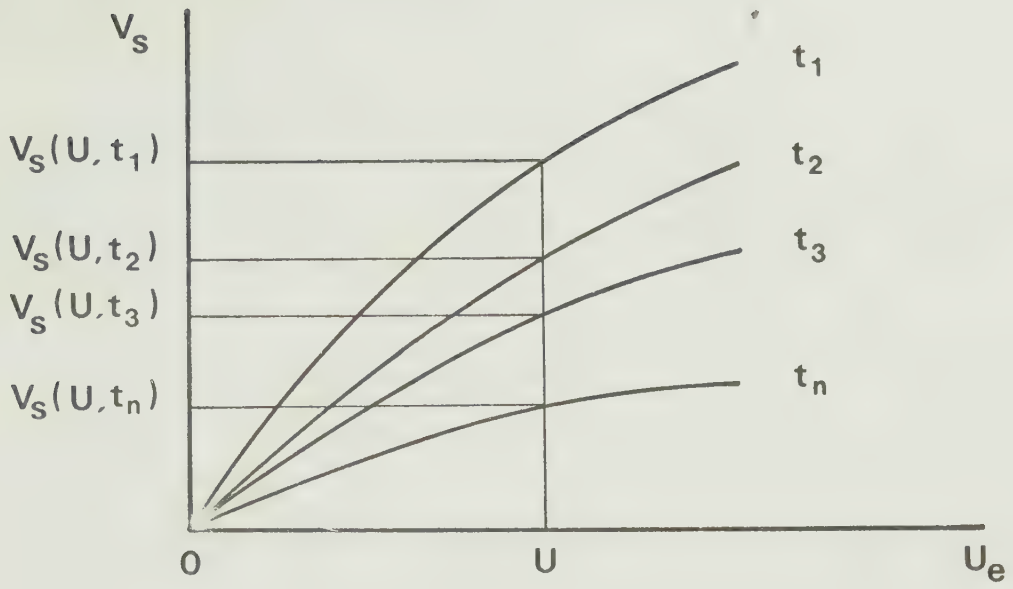


Fig. 6.4.

soit, plus précisément :

$$V_s(U_e,t) = \alpha(t)\ V_s(U_e,0)$$

Nous supposons que la dérive est linéaire dans le temps. Donc :

$$\alpha(t) = 1 + \beta t \qquad (6.2.)$$

Lorsque nous effectuons la mesure de N vitesses U_1, U_2 ... U_N à des temps espacés régulièrement de Δt, nous notons, à la sortie de l'anémomètre :

$$V_s(U_1,\Delta t) = (1 + \beta\Delta t)\ V_s(U_1,0) \qquad (6.3a)$$

$$V_s(U_2,2\Delta t) = (1 + 2\beta\Delta t)\ V_s(U_2,0) \qquad (6.3b)$$

.....

$$V_s(U_N,N\Delta t) = (1 + N\beta\Delta t)\ V_s(U_N,0) \qquad (6.3c)$$

Ce que nous cherchons, aussi bien à l'étalonnage qu'à la mesure, c'est à connaître $V_s(U_i,0)$, de façon à ramener tout à une courbe d'étalonnage "hors dérive".

Il faut alors connaître $\beta\Delta t$. Pour cela, ayant terminé l'exploration de la couche, il suffit de revenir au point initial (en général la valeur de la vitesse à l'infini après avoir effectué N mesures). Si on suppose, ce qui est vrai, au premier ordre, que les mesures ont été faites à des temps également répartis, on a :

$$1 + (N+1)\beta\Delta t = \frac{V_s(U_1,(N+1)\Delta t)}{V_s(U_1,0)} \qquad (6.4a)$$

qui nous donne $\beta\Delta T$.

De chaque mesure de vitesse, on déduit ainsi le signal ramené à l'étalonnage "initial" :

$$V_s(U_n,0) = \frac{V_s(U_n,n\Delta t)}{1 + n\beta\Delta t} \qquad (6.4b)$$

Cette méthode nous a donné des profils de vitesses très reproductibles. On peut vérifier sur les profils reproduits fig. 6.5a et b que deux balayages consécutifs sont bien identiques.

2) Les problèmes posés par les vibrations ont deux origines : d'une part, les vibrations mécaniques (moteur, paliers) peuvent se transmettre par l'intermédiaire du tube d'acier. Les éléments scellés dans le sol sont isolés par des tampons amortisseurs (grip-sol). Tous les contacts entre pièces métalliques sont isolés par le même matériau. D'autre part, le fluide lui-même étant incompressible, transmet les vibrations que lui communiquent les chevrons de la pompe.

Nous avons dû à ce fait de ne pas pouvoir mesurer de taux de turbulence d'écoulement extérieur, mesure qui n'aurait pas eu de sens. Lors du traitement théorique du chapitre 7, nous utiliserons des méthodes qui supposent un profil de vitesses caractérisé par une loi de paroi. Il importe de savoir quelles modifications à cette hypothèse pourraient introduire ces vibrations. Nous les assimilerons ici à une turbulence d'écoulement extérieur. Charnay, Mathieu et Comte-Bellot [84] ainsi que Mc Donald et Kreskovski [83] ont étudié le problème de la couche limite perturbée. Leurs études concluent principalement :

- Le profil de vitesses est affecté seulement dans sa partie extérieure. La loi de paroi n'est pas notablement modifiée tant que $y^+ = U_f y/\nu$ est inférieur à 300). Le profil est en général aplati, remonté vers le haut. Le paramètre de forme est diminué.

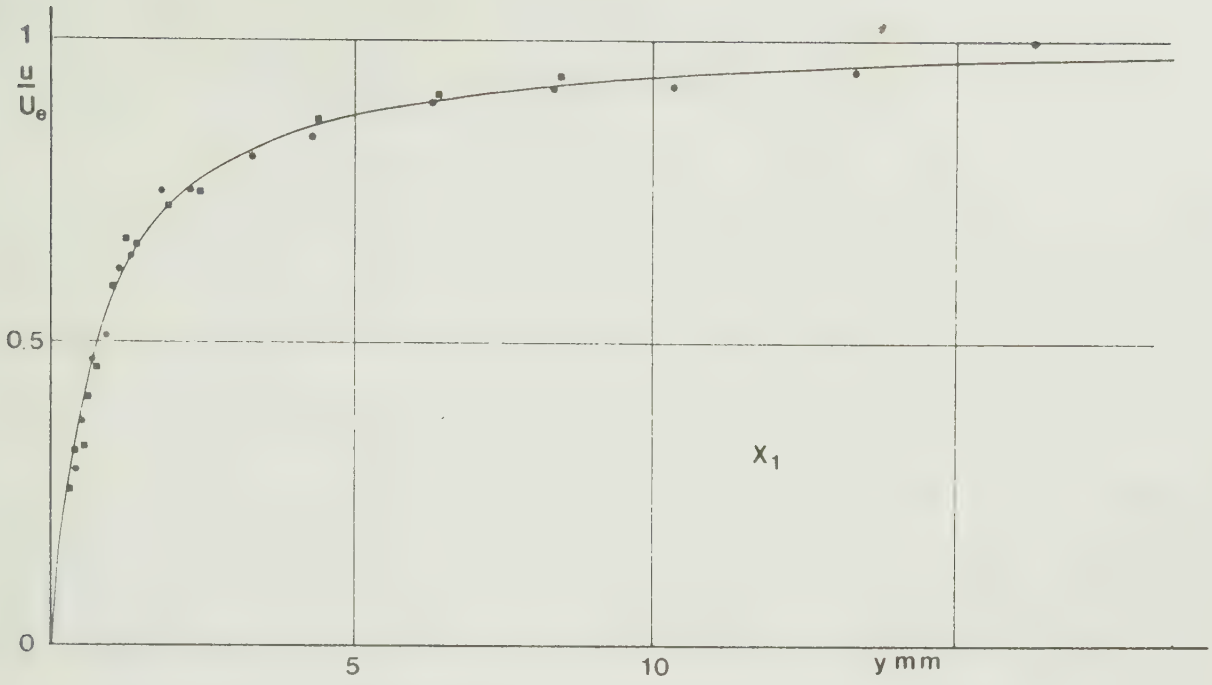


Fig. 6.5a : Profils de vitesses au point X_1 (U_e = 26 cm/s)

■ 1er balayage ✱ 2e balayage

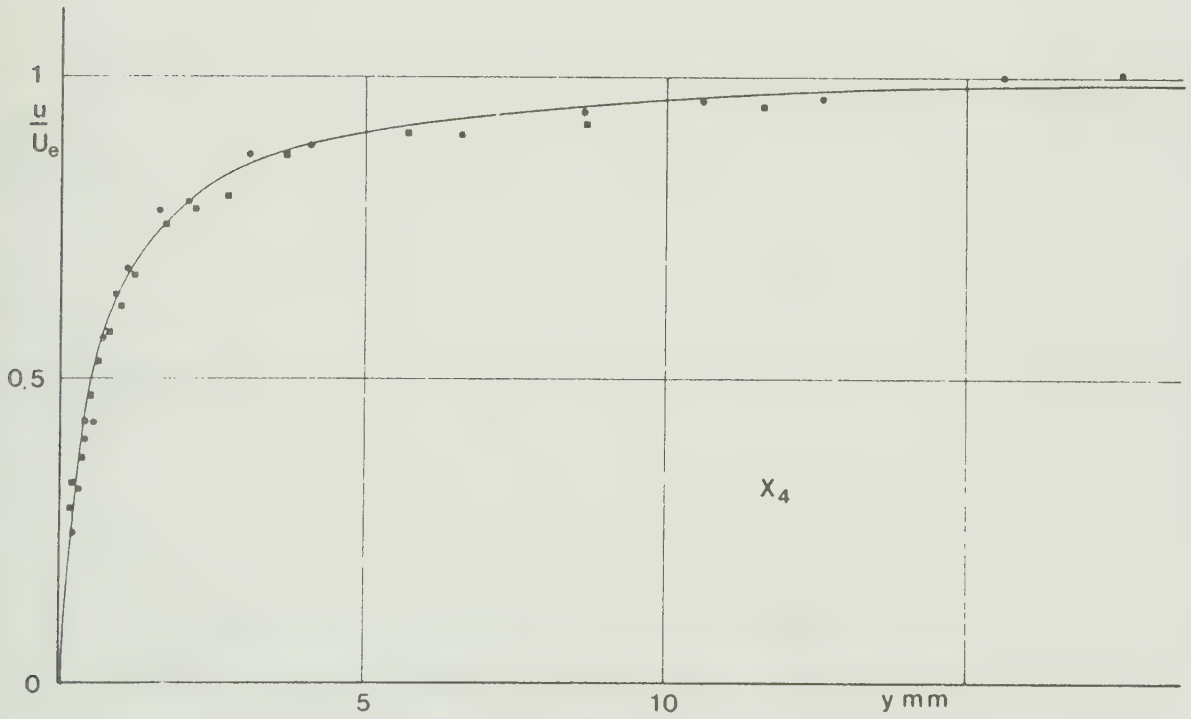


Fig. 6.5b : Profils de vitesses au point X_4 (U_e = 26 cm/s)

■ 1er balayage ✱ 2e balayage

- Le taux de turbulence est fortement affecté dans la couche extérieure. Dans la loi de paroi, il y a peu de variation.

- Le coefficient de frottement est augmenté.

- La couche est épaissie.

L'action est donc essentiellement localisée à la partie extérieure de la couche limite.

6.1c. Les profils de vitesses

- L'étalonnage : nous avons mesuré U_e à l'aide du diaphragme déjà utilisé en 4.1. Devant effectuer une correction de dérive, à l'étalonnage comme à la mesure, il était nécessaire d'effectuer les deux opérations avec la même eau, et le même montage dans un intervalle de temps le plus restreint possible. D'où la nécessité d'étalonner la sonde dans la veine de mesures.

- L'étude des profils de vitesses a pour but :
  . de vérifier l'établissement du régime turbulent en déterminant la forme de la loi de paroi.
  . d'en déduire le coefficient de frottement.

- Dans le cas d'une couche turbulente axisymmétrique, on peut présenter le profil de vitesses sous plusieurs formes :

1) Si la couche limite est de faible épaisseur, les profils diffèrent peu, au voisinage de la paroi, de ceux déterminés par une plaque plane [80] : à savoir, si le profil est tracé dans le plan (u^+, y^+) :

$$u^+ = \frac{u}{U_f} \quad ; \quad y^+ = \frac{U_f y}{\nu} \qquad (6.5.)$$

où U_f est la vitesse de frottement. On a :

$$y^+ < 11 \quad ; \quad u^+ = y^+ \qquad (6.6.)$$

$$y^+ > 30 \quad ; \quad u^+ = 5{,}75 \log y^+ + B \qquad (6.7.)$$

Dans le cas du cylindre, la loi déficitaire ($y^+ > 250$) prend une forme différente, variable suivant les auteurs. Notons celle que Yu [80] propose :

$$\frac{U_e - u}{U_f} = - 5,75 \; Ln \; y^+ \; e^{- \frac{\sigma}{\ell}} - 5,82 \qquad (6.8.)$$

ℓ est une constante, σ est égal à U_e/U_f.

Lorsque la couche s'épaissit, il est préférable d'utiliser la forme proposée par Rao [74] (voir chapitre 3).

Dans notre cas, la première formulation est convenable.

Nous présentons ici des profils mesurés en quatre points X_1 à X_4 dont les positions respectives sont représentées sur la figure (6.1.).

La figure 6.5. montre deux exemples de profils mesurés (U_e = 26 cm/s).

Nous avons évalué par intégration mécanique, à partir des profils expérimentaux, les épaisseurs δ_1 et δ_2 définies par :

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \qquad (6.9.)$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \qquad (6.10.)$$

Le paramètre de forme δ_2/δ_1 est généralement de l'ordre de 1,25. (Il est de 1,3 pour une couche non perturbée, ce qui confirme l'hypothèse de 5.1b).

Nous avons déduit le coefficient de frottement de l'épaisseur de quantité de mouvement par la loi de Karmann-Schoenherr. Cette loi est en effet valable pour différentes valeurs du paramètre de forme [25] :

$$C_f = \frac{0,0586}{(log \; 2R_{\delta_2})(log \; 2R_{\delta_2} + 0,868)} \qquad (6.11a)$$

où

$$R_{\delta_2} = \frac{U_e \delta_2}{\nu} \qquad (6.11b)$$

Nous donnons ici les résultats de mesures effectuées pour U_e = 26 cm/s : (tableau 6.1.).

Point	δ_1 cm	δ_2 cm	C_f
X_1	0,199	0,164	$5,26.10^{-3}$
X_2	0,189	0,168	$5,23.10^{-3}$
X_3	0,162	0,129	$5,59.10^{-3}$
X_4	0,172	0,15	$5,39.10^{-3}$

Tableau 6.1.

L'incertitude sur la valeur de C_f provient surtout de la difficulté de tracer la loi extérieure, dont la contribution à δ_2 n'est pas négligeable. Nous reviendrons sur ces valeurs au chapitre 7.

En résumé :

- Dans les simulations que nous présentons au paragraphe suivant, la couche est turbulente établie.

- On peut supposer l'existence d'un profil semblable à celui d'une plaque plane, du moins pour la zone proche de la paroi, qui, dans notre cas, est le siège du transfert. La figure 6.6. reproduit les profils mesurés en X_1, X_2, X_3 et X_4 dans le plan (y^+,u^+), on vérifie ainsi l'hypothèse précédente.

- Le profil de vitesses pourra être considéré comme constant sur la zone étudiée.

Ayant ainsi défini notre champ de vitesses, nous allons présenter maintenant les simulations effectuées.

6.2. LES SIMULATIONS THERMIQUES EN TURBULENT

Comme en régime laminaire, la simulation thermique fait intervenir les paramètres suivants : T_r, n, U_e, K. Leur influence qualitative reste d'ailleurs la même.

Les présentes simulations ont été effectuées sur la même zone que celles décrites en 4.2.

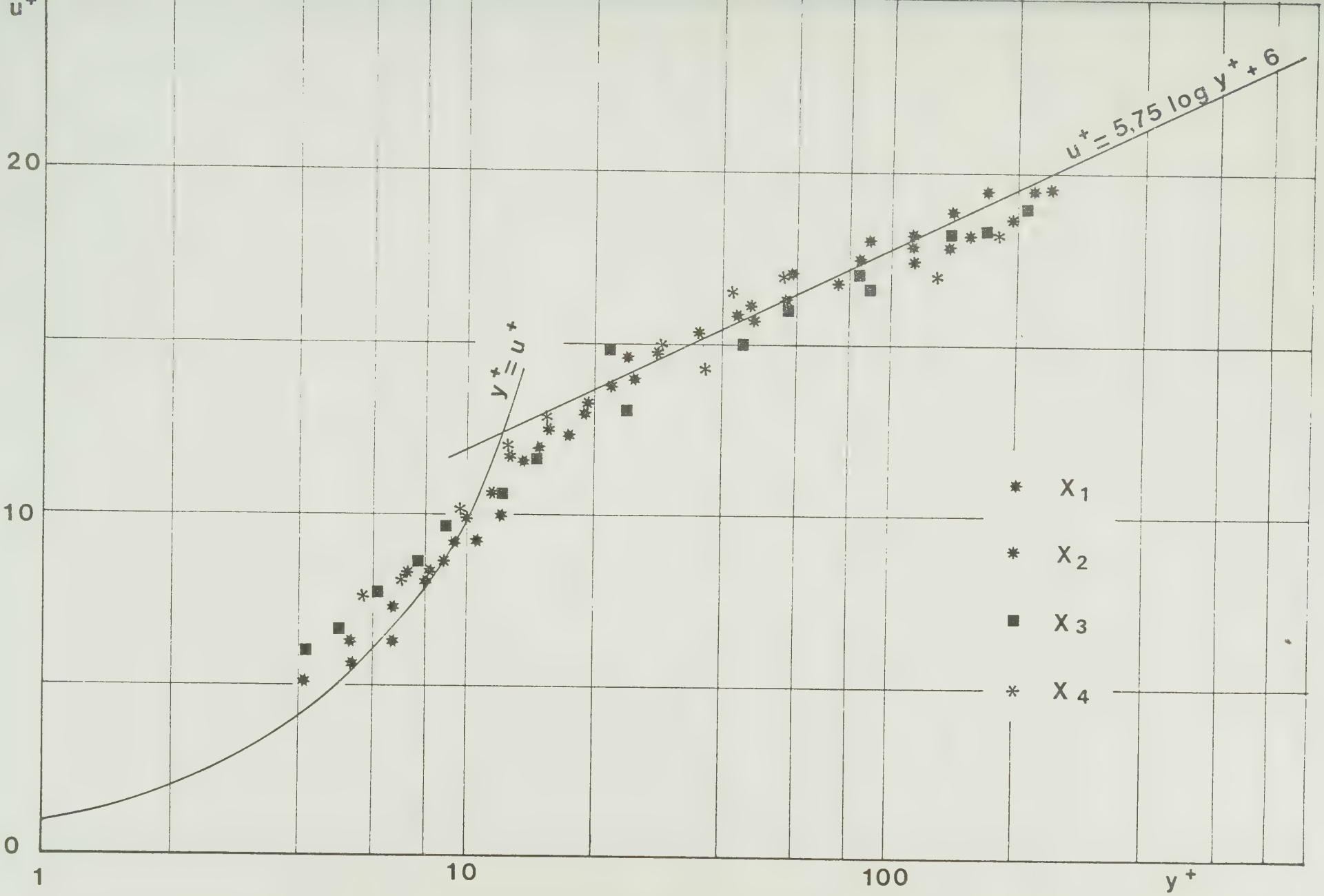


Fig. 6.6.:Vérification de l'existence
d'une loi de paroi universelle

La cinétique de paroi est réalisée de la même manière qu'en 4.2. Remarquons cependant que cette loi est réalisée sur des valeurs moyennes. C'est-à-dire que, à la paroi, nous avons :

$$\bar{\phi} = K\,\bar{\theta}_w$$

Nous reprendrons cette remarque au chapitre 8.

ΔT_r conserve le même rôle qu'en laminaire, en dilatant plus ou moins l'origine des profils de concentration. Lorsque ΔT_r croît, les profils remontent (fig. 6.7., 6.8. et 6.9.).

La concentration pariétale, à même constante de cinétique varie d'autant plus vite que l'ordre est faible (fig. 6.10. et 6.11.).

L'augmentation de la cinétique amène une décroissance plus rapide des concentrations de surface, ce qu'on vérifie à l'ordre 1 sur la figure 6.12.

La concentration pariétale augmente avec la vitesse (fig. 6.13.).

Remarquons enfin, que, comme nous le verrons au chapitre 7, la loi de transfert pariétal peut prendre la forme (5.18.) où p = 0,8. Ce qui fait que l'on peut exprimer le profil de concentration réduite m_w sous la forme $m_w\,(z_{0,8})$. Cette variable, en simulation thermique, s'écrit :

$$z_{0,8} = \left(\frac{K}{\lambda \Delta T_r}\right)^5 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0,4} \frac{1}{\theta_{0,8}^{5}}\, x$$

Comme au chapitre 4, les remarques précédentes illustrent le fait que m_w diminue avec $z_{0,8}$.

Nous allons comparer maintenant ces premiers résultats de simulation thermique avec un calcul dérivé de celui du chapitre 5.

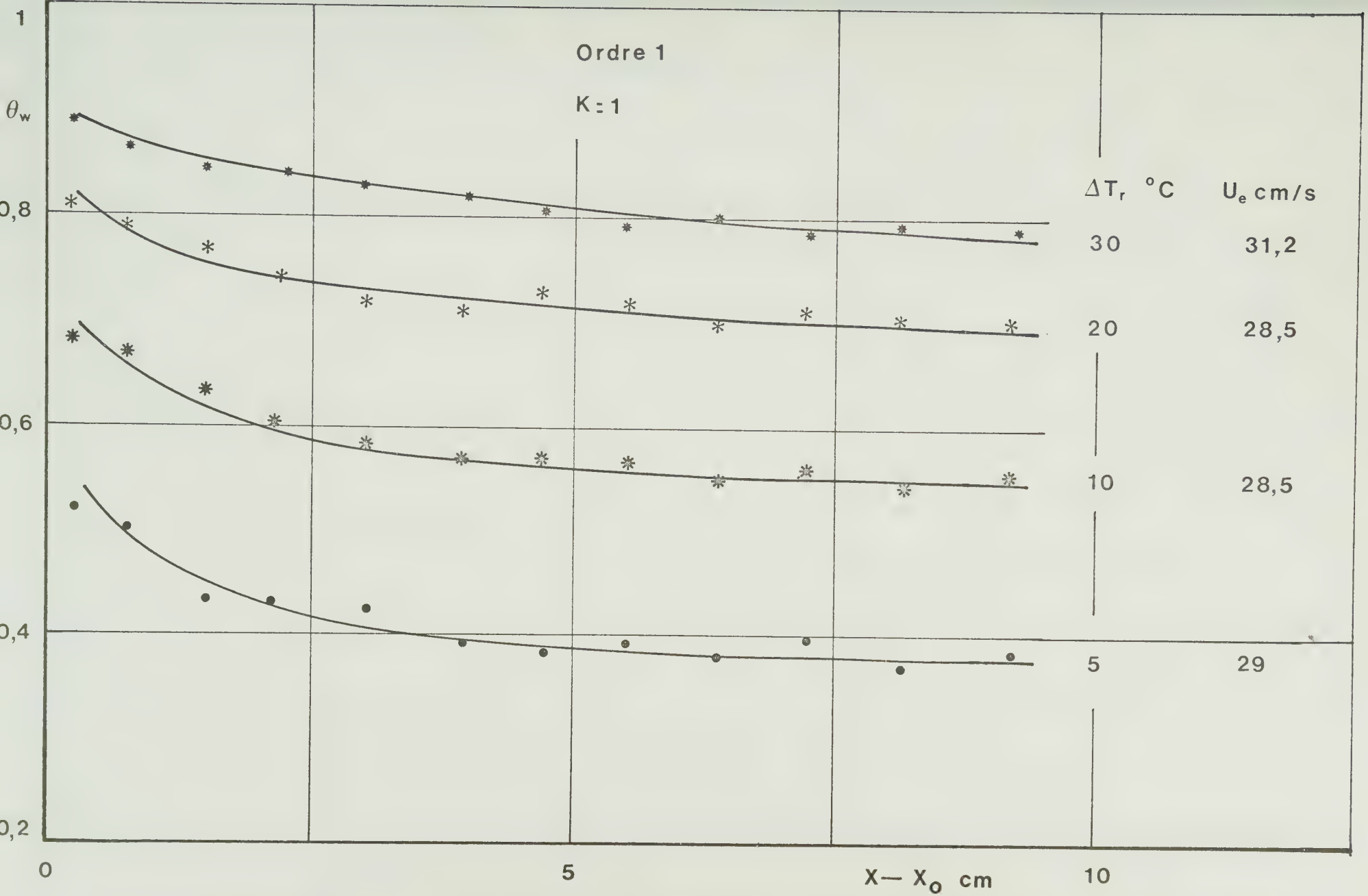


Fig. 6.7. : Simulation thermique en régime turbulent à l'ordre 1.
Influence de $T_r - T_o$

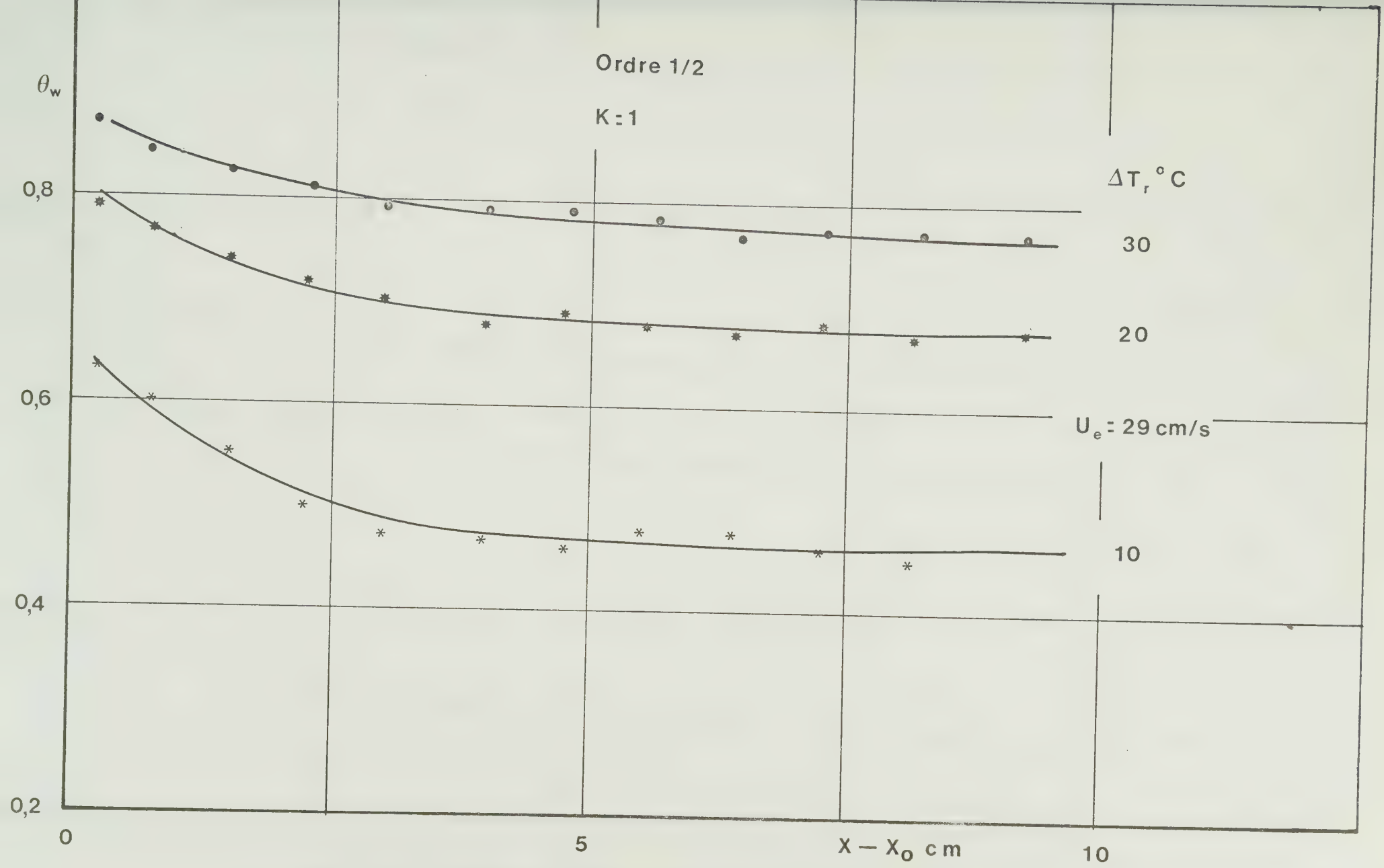


Fig. 6.8. : Simulation thermique en régime turbulent à l'ordre 1/2.
Influence de $T_r - T_e$

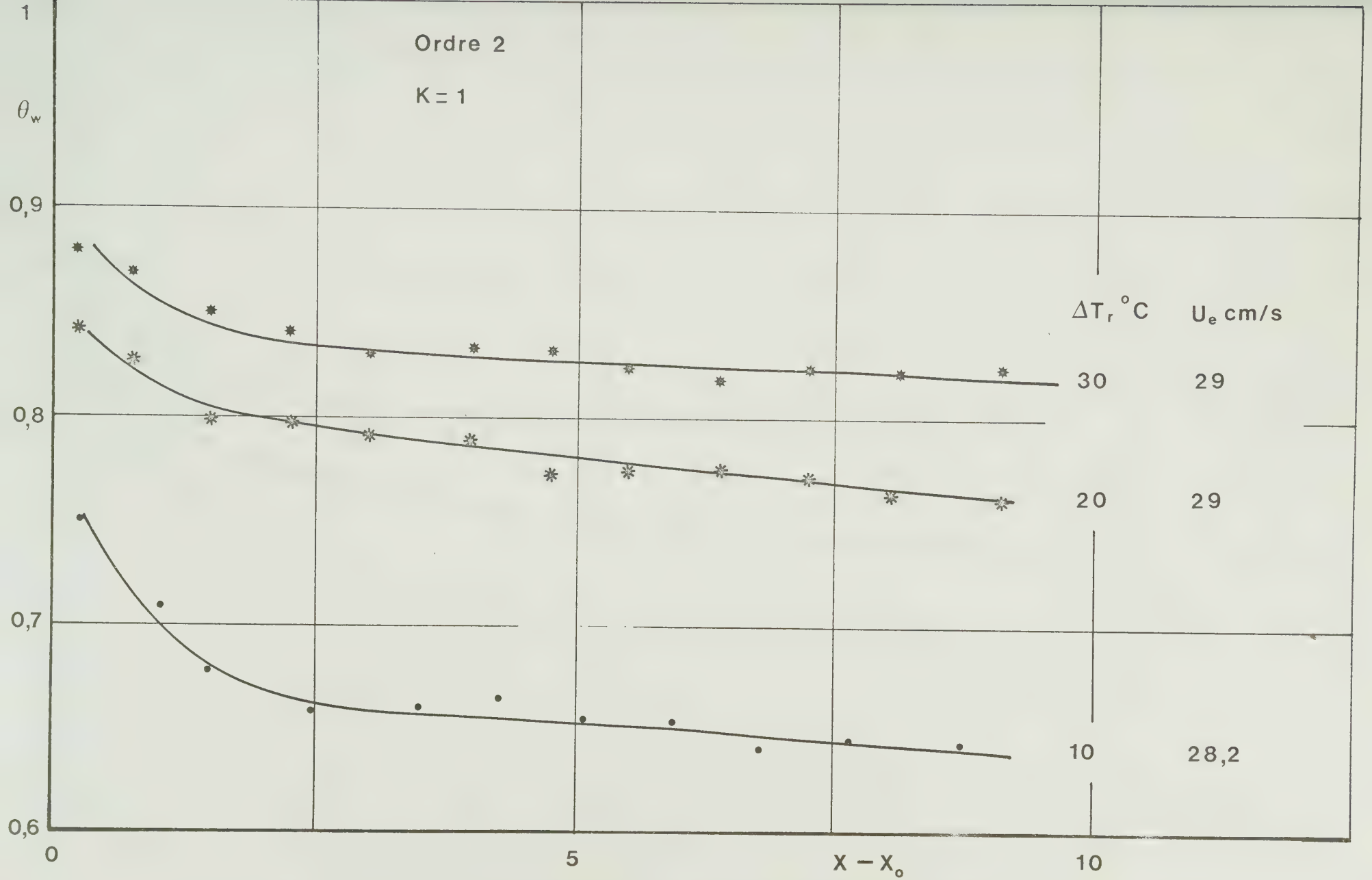


Fig. 6.9. : Simulation thermique en régime turbulent à l'ordre 2.
Influence de $T_r - T_e$

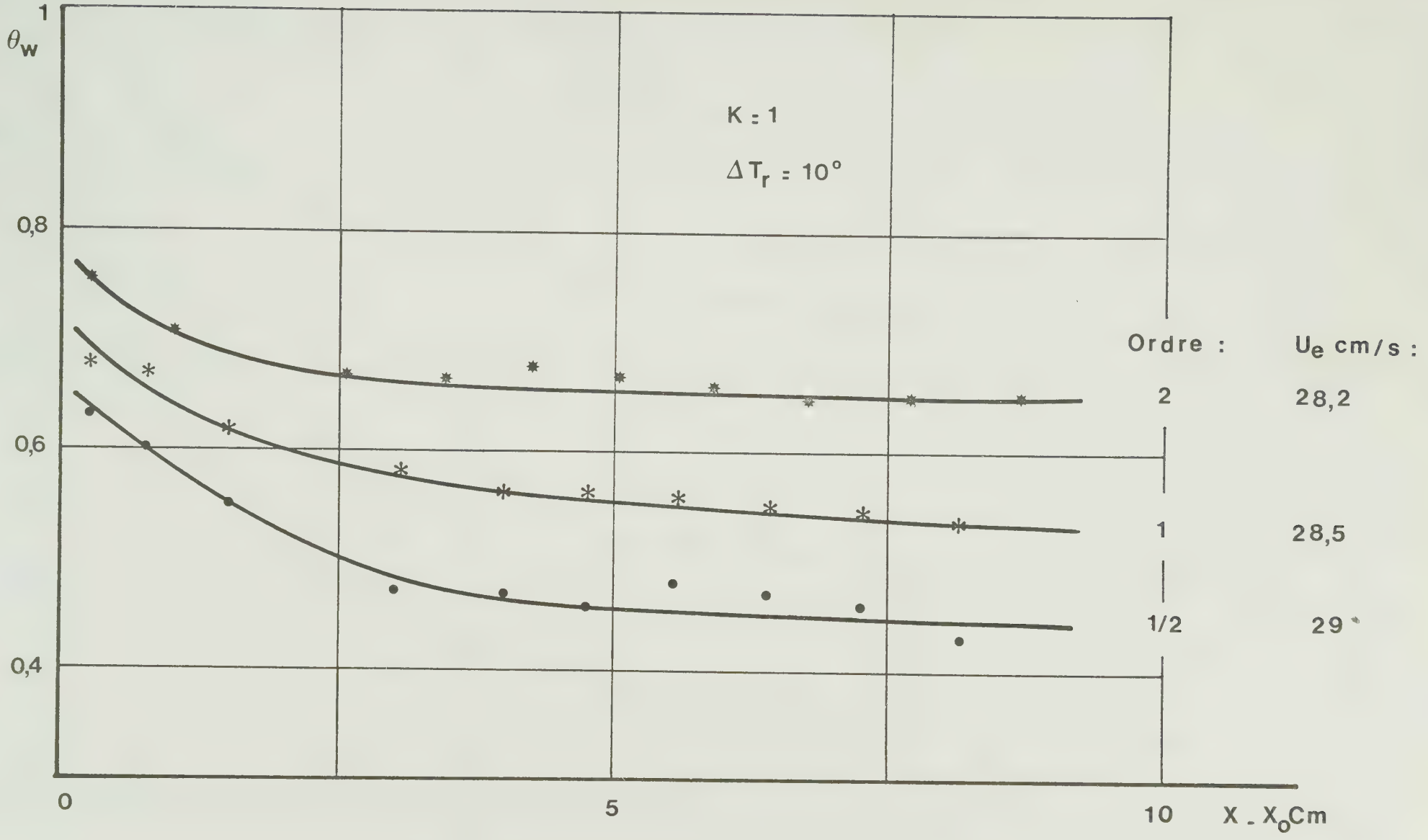


Fig. 6.10. : Simulation thermique en régime turbulent.
Influence de l'ordre (T_r-T_e = 10°C)

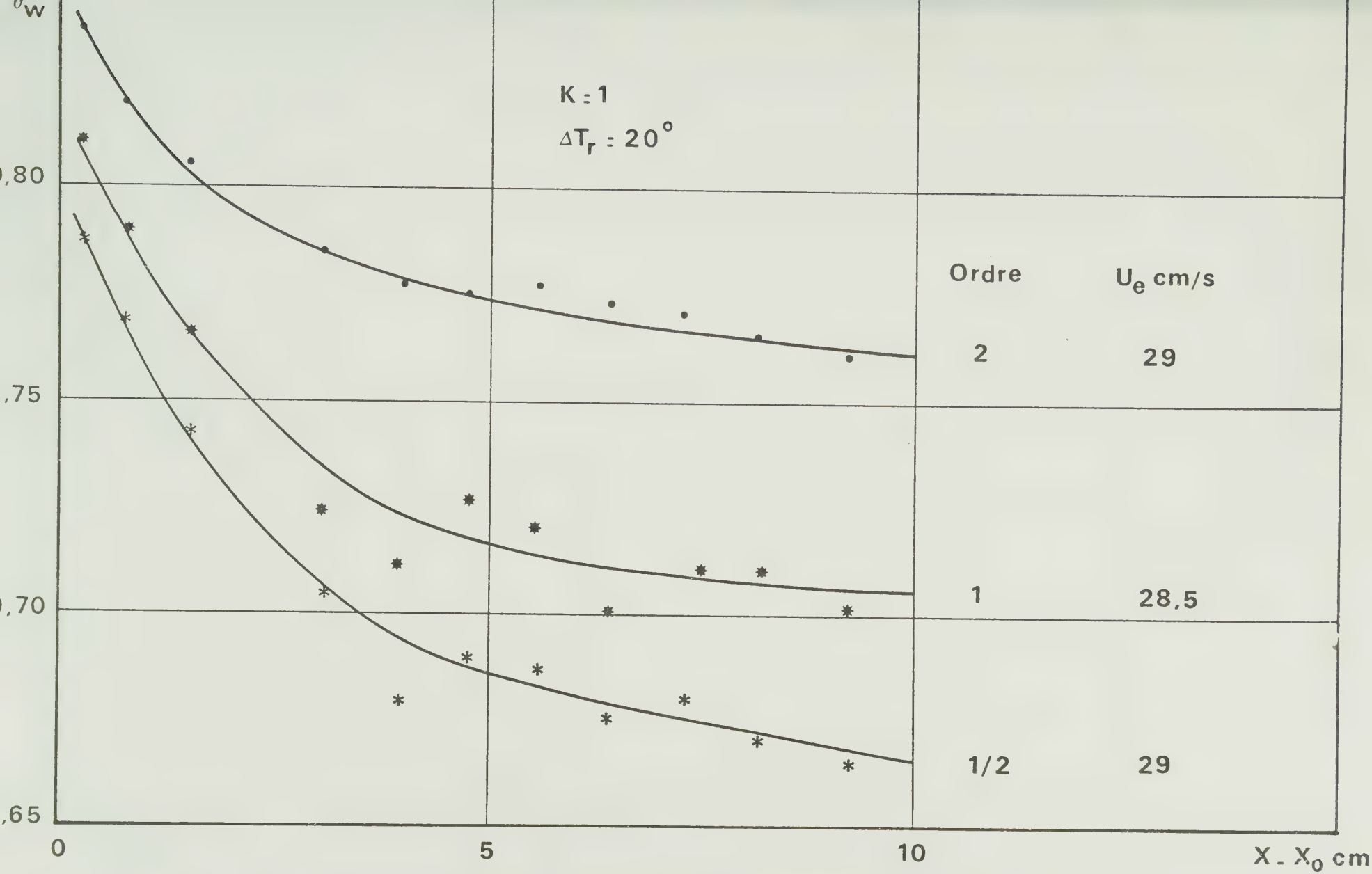


Fig. 6.11. : Simulation thermique en régime turbulent.
Influence de l'ordre (T_r-T_e = 20°C)

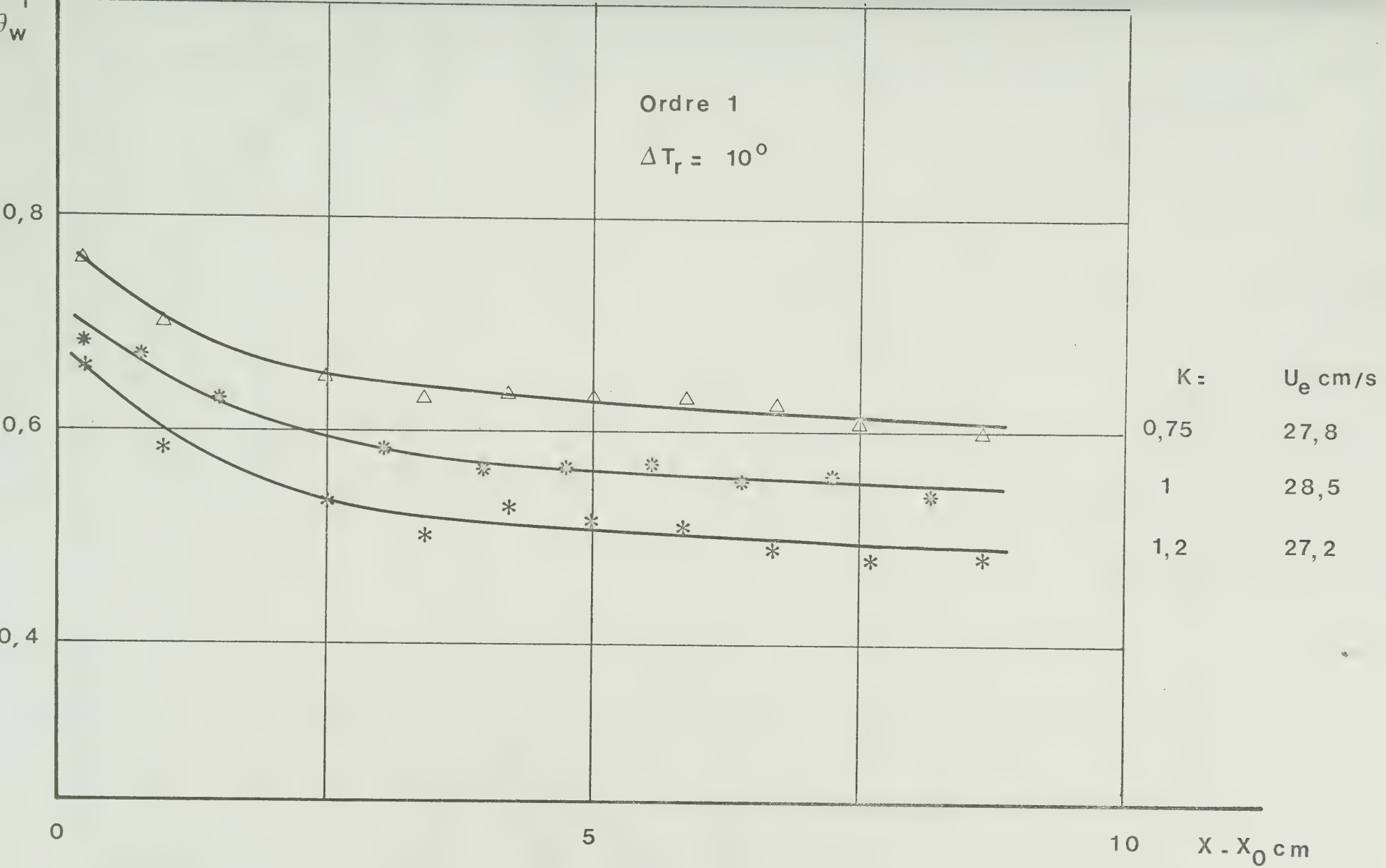


Fig. 6.12. : Simulation thermique en régime turbulent.
Influence de K à l'ordre 1.

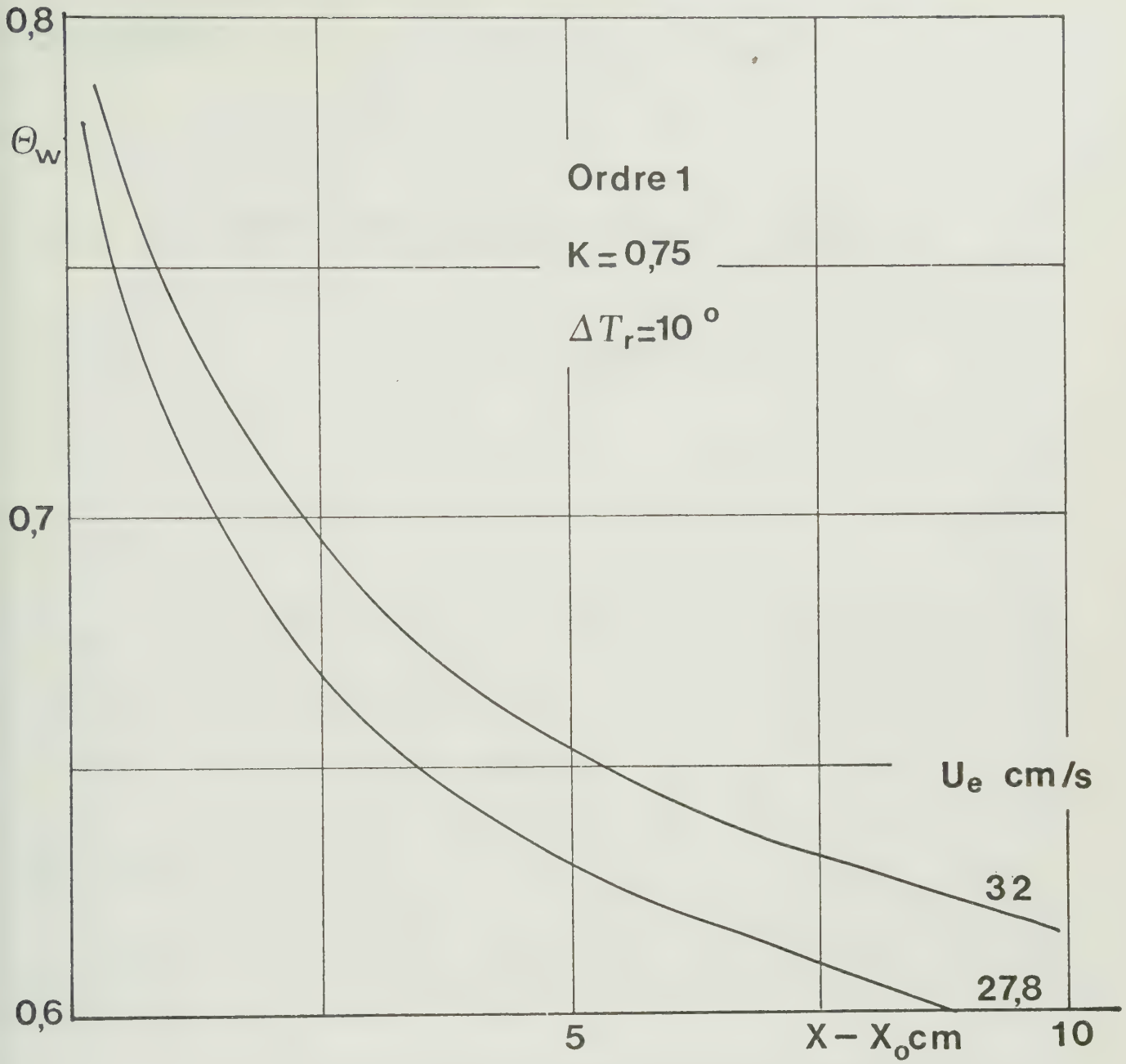


Fig. 6.13a : Influence de la vitesse à l'ordre 1

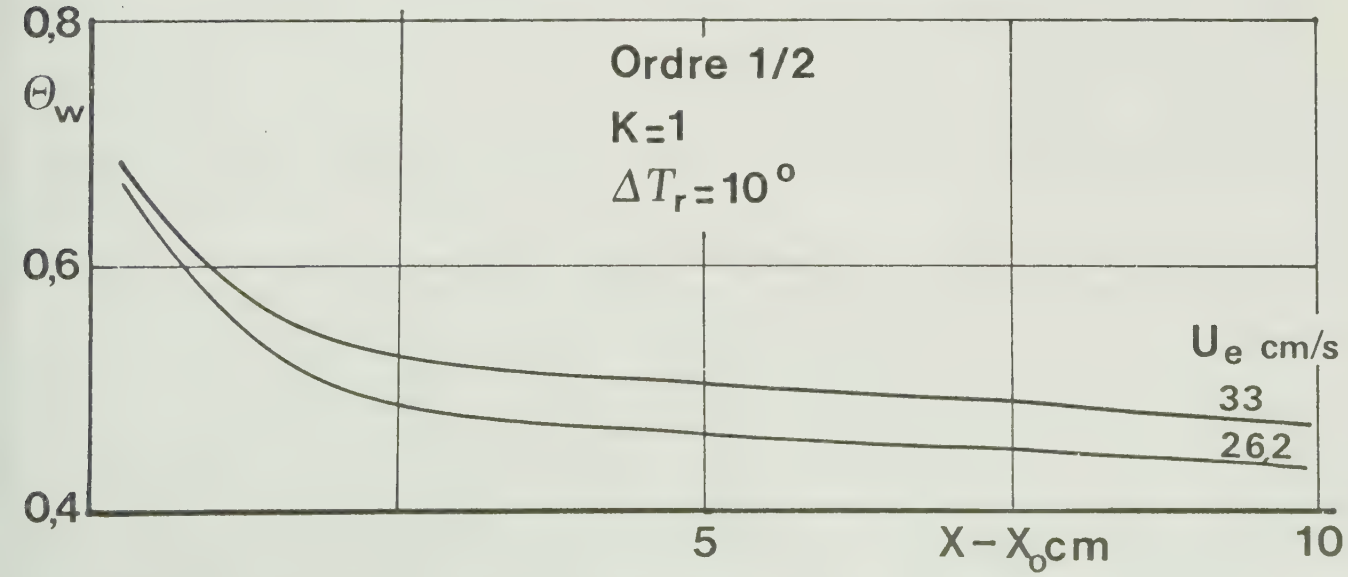


Fig. 6.13b : Influence de la vitesse à l'ordre 1/2

Chapitre 7

Le calcul des concentrations pariétales en régime turbulent

D'une manière générale, il existe deux directions dans l'étude de la couche limite turbulente : ou bien, on considère essentiellement l'aspect macroscopique du phénomène et on déduit de l'expérience ou du calcul des expressions donnant les valeurs des paramètres caractéristiques du transfert (viscosité, diffusivités turbulentes), ou bien on s'attache plus particulièrement à l'aspect statistique du phénomène : c'est la voie la plus récente, c'est aussi celle qui mènera à une connaissance plus profonde du phénomène. Toutefois, dans l'état actuel de nos connaissances, c'est encore le premier mode d'étude qui donne l'essentiel des précisions macroscopiques [8]. Nous voyons là un intérêt majeur de la simulation thermique : même en ne s'intéressant qu'à des valeurs macroscopiques, on n'a besoin dans l'étude d'aucune des hypothèses simplificatrices qui "affaiblissent" obligatoirement un modèle de calcul numérique [31][32]. Nous reviendrons au chapitre 8 sur le problème particulier de la validité d'une loi de cinétique pariétale telle que nous la réalisons au chapitre 6.

Nous allons ici comparer les résultats présentés au chapitre 6 à des concentrations pariétales théoriques. Il existe dans la littérature peu de calculs de ce genre. Chambre [42], nous l'avons vu, propose l'utilisation du principe de superposition. C'est la méthode que nous adopterons : elle nous permet d'ailleurs d'utiliser le même procédé qu'au chapitre 5. Nous suivrons également une suggestion émise par Rosner [50] qui consiste à introduire la fonction de Spalding dans l'intégrale de Stieltjes de (5.16.).

7.1. LE CHOIX D'UN NOYAU ET LA MISE EN FORME DU CALCUL

Nous cherchons $m_w(x)$ qui est la solution pour y nul du système (5.1.) à (5.5.). Cette écriture attire les remarques suivantes :

- Ce système est écrit pour des valeurs moyennes. Nous n'envisagerons d'ailleurs dans ce chapitre que des valeurs moyennes.

- Les viscosités et diffusivités sont chacune la somme d'un terme moléculaire (ou laminaire) et d'un terme turbulent (qui est en fait la moyenne d'un produit de fluctuations).

Remarquons qu'en utilisant le principe de superposition, on fait implicitement l'hypothèse, non seulement de la validité de ces équations, mais aussi du fait que les distributions des diffusivités (au sens large) déterminées en général pour une concentration (ou une température) de paroi constante, ne sont pas affectées par le phénomène de disparition pariétale (on rencontre déjà une telle hypothèse dans le calcul par Smith et Shah [20] du transfert en turbulent à flux constant, par la méthode de Spalding).

Rappelons l'équation qui va donner $m_w(x)$:

$$J_w(x) = - \int_{x_0}^{x} \beta(x,\xi) \frac{dm}{d\xi} d\xi \qquad (5.16.)$$

avec la condition $x < x_0$, $m_w(x) = 1$.

Le calcul, moyennant les hypothèses qui précèdent, consiste donc, comme au chapitre 5, à résoudre l'équation (5.16.) avec une expression convenable de $\beta(x,x_0)$.

Plusieurs cas peuvent se présenter : on considère une couche limite ayant un développement dit normal (principalement avec des épaisseurs caractéristiques croissant comme $x^{0,8}$) à partir d'une abcisse (fictive ou non) connue. Ou bien, sur la zone catalytique, on caractérise le transfert par la répartition du coefficient de frottement.

7.1a. Dans le premier cas, on peut utiliser dans le noyau des expressions du coefficient de convection telles que celles proposées par Rubesin. Ecrites en termes de Sherwood, elles s'expriment respectivement par :

$$Sh_R(x,x_0) = 0,0296\ Sc^{1/3}\ \frac{R_x^{0,8}}{\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{39/40}\right]^{7/39}} \qquad (7.1.)$$

$$Sh_S(x,x_0) = 0,0276\ Sc^{1/9}\ \frac{R_x^{0,8}}{\left|1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{9/10}\right|^{1/9}} \qquad (7.2.)$$

Les coefficients numériques sont ceux modifiés par Hartnett [11].

Ces expressions sont de la forme (5.18.), où p est égal à 0,8.

Nous pouvons donc introduire une variable que nous appellerons ω_R ou ω_S selon que l'on considérera (7.1.) ou (7.2.) et qui est de la forme $z_{0,8}$:

$$\omega_{R\ ou\ S} = \left[\left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0,8} \times \frac{k(\rho Ce)^{n-1}}{\rho D} \times \frac{1}{\theta_{R\ ou\ S}}\right]^5 x \qquad (7.3.)$$

avec

$$\theta_R = 0,0296\ Sc^{1/3} \qquad (7.4a)$$

et

$$\theta_S = 0,0276\ Sc^{1/9} \qquad (7.4b)$$

Nous verrons plus loin des raisons de modifier θ_S.

L'équation (5.20.) prend alors la forme :

$$m_\omega^n(\omega) = -\frac{1}{\omega^{0,2}} \int_{\omega_0}^{\omega} g_{0,8}\left(\frac{\zeta}{\omega}\right)\, dm_\omega(\zeta) \qquad (7.5.)$$

La résolution est formellement identique à celle décrite en (5.3c). On tirera donc $m_w(\omega)$ d'expressions correspondant à (5.56.)

$$\left(1 + \sum_1^k j_i\right)^n = -\omega_R^{0,8} \sum_1^k \frac{j_i}{\Delta\omega_{R_i}}\, \pi_{R_i}^k \qquad (7.6.)$$

ou

$$\left(1 + \sum_1^k j_i\right)^n = -\omega_S^{0,8} \sum_1^k \frac{j_i}{\Delta\omega_{S_i}}\, \pi_{S_i}^k \qquad (7.7.)$$

Les j_i se définissent comme en 5.3. Un calcul analogue à celui de 5.3. montre que, compte tenu de (7.1.) et (7.2.), les π_i^k ont pour définition :

$$\pi^k_{R_i} = M_R \left(\frac{\omega_{R_i}}{\omega_{R_k}}\right) - M_R \left(\frac{\omega_{R_{i-1}}}{\omega_{R_k}}\right) \qquad (7.8.)$$

$$\pi^k_{S_i} = M_S \left(\frac{\omega_{S_i}}{\omega_{S_k}}\right) - M_S \left(\frac{\omega_{S_{i-1}}}{\omega_{S_k}}\right) \qquad (7.9.)$$

M_R et M_S sont des intégrales définies par :

$$M_R(x) = \int_0^x \left(1 - \psi^{39/40}\right)^{-7/39} d\psi \qquad (7.10.)$$

$$M_S(x) = \int_0^x \left(1 - \psi^{9/10}\right)^{-1/9} d\psi \qquad (7.11.)$$

L'intérêt du calcul posé par (7.6.) et (7.7.) réside dans le fait que les intégrales (7.10.) et (7.11.) sont tabulées dans [11].

Nous présentons (fig. 7.1.) des profils de concentrations calculés à l'aide de (7.6.). La figure (7.2.) montre deux profils calculés par (7.6.) et (7.7.). Ils ont été tracés en prenant la même échelle pour ω_R et ω_S. Les deux courbes sont pratiquement confondues. Ishiguro [21] a montré, en étudiant le transfert thermique dans un courant d'eau au voisinage d'une plaque plane, que la formule de Seban sous-estime fortement le calcul des flux. Nous voyons là une confirmation à ce que suggère la figure (7.2.), à savoir de remplacer, dans l'expression de θ_S, $Sc^{1/9}$ par $Sc^{1/3}$, ce qui identifie θ_S et θ_R.

7.1b. La validité des résultats de tous ces calculs dépend en grande partie de la valeur du noyau utilisé.

Ishiguro a montré [21][22] qu'en utilisant le calcul décrit dans [15], on obtient une meilleure évaluation des flux. Nous allons, avant de l'utiliser, résumer les principes de l'établissement de cette loi de transfert [15].

Introduisons les variables

$$x^+ = \int_{x_0}^x \frac{U_f dx}{\nu} \quad ; \quad y^+ = \frac{U_f y}{\nu} \qquad (7.12a)$$

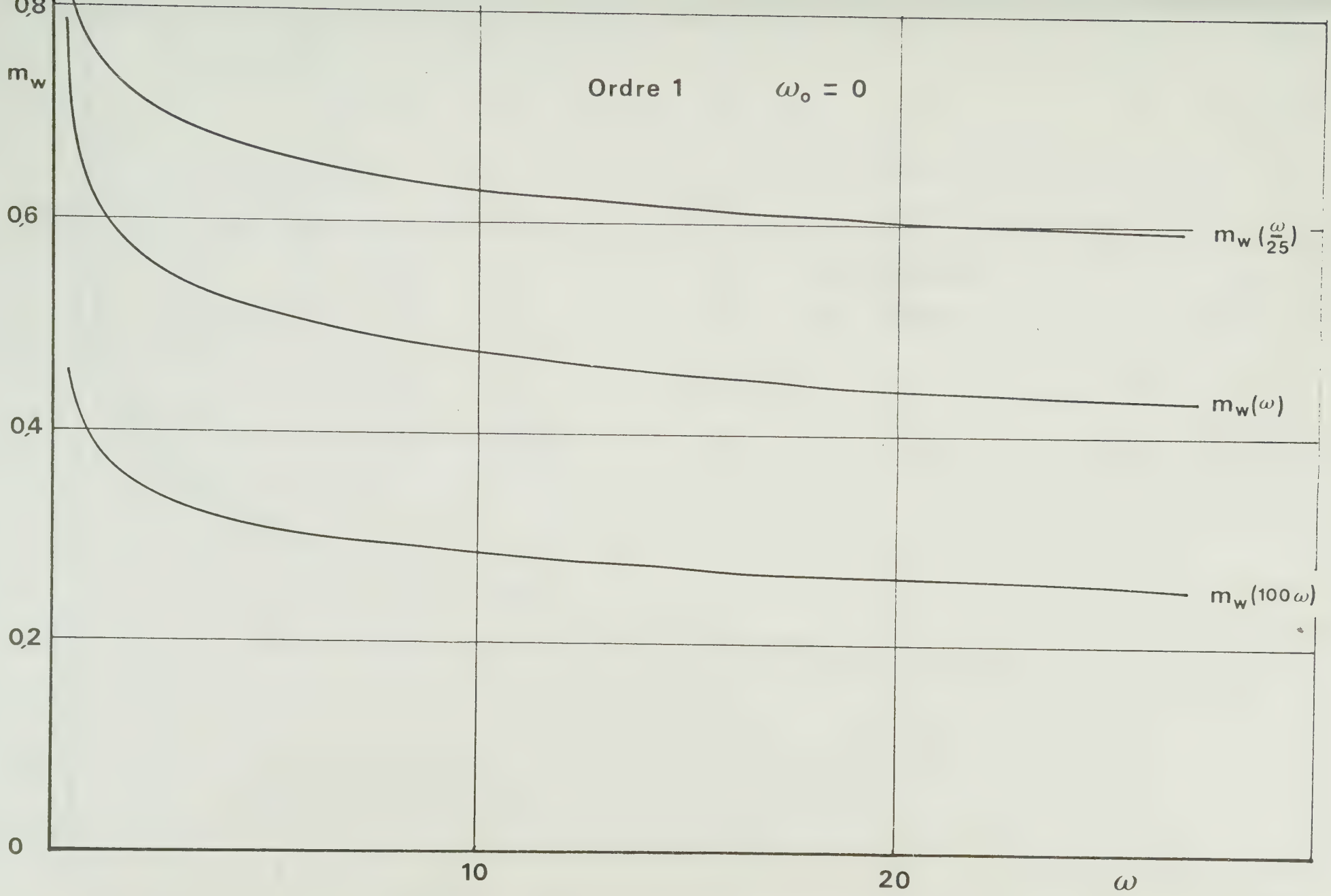


Fig. 7.1. : Profils de concentration pariétale
calculés à partir de (7.6.)

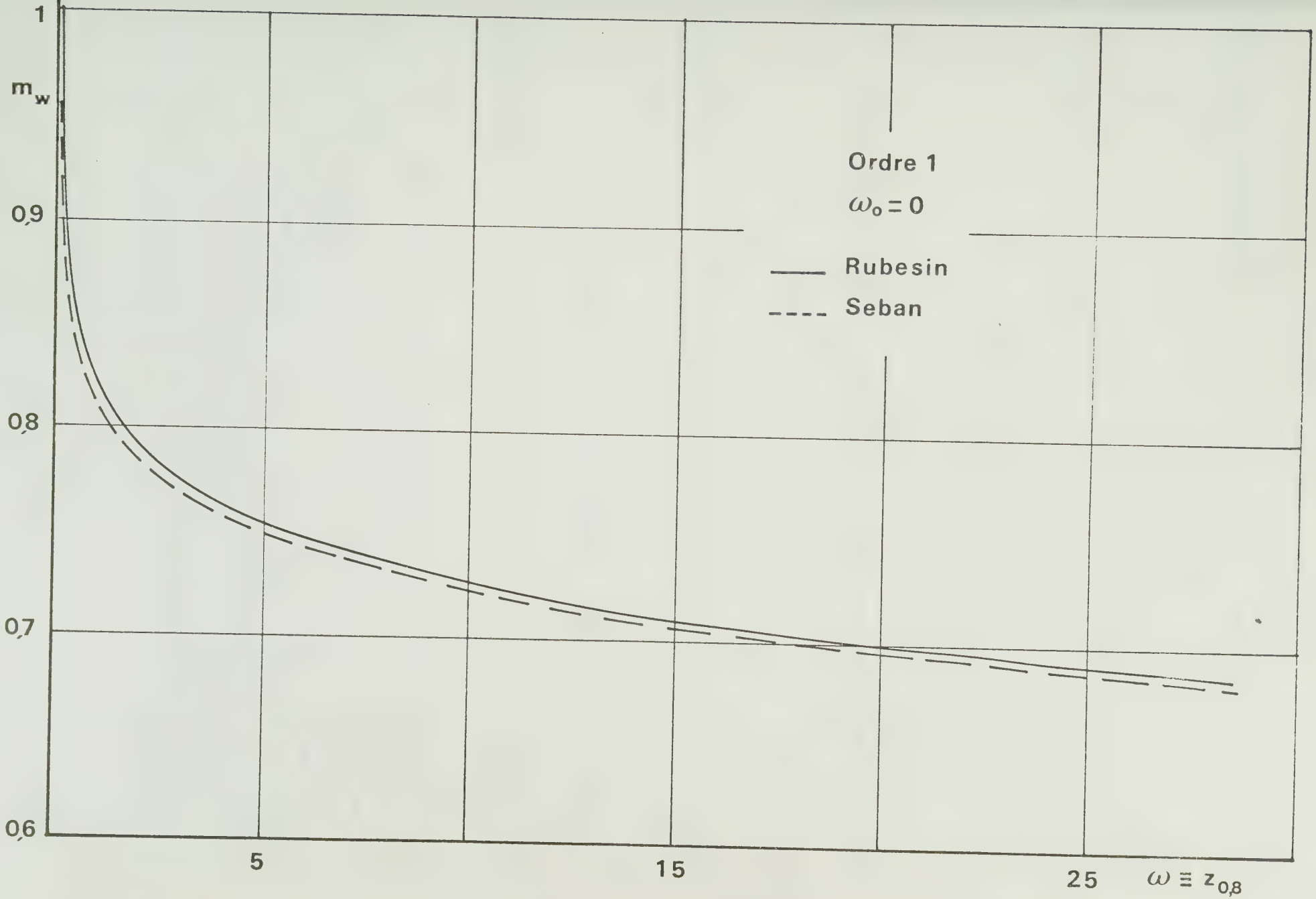


Fig. 7.2. : Comparaison de résultats
calculés à partir de (7.6.) et (7.7.)

$$u^+ = \frac{u}{U_f} \qquad \varepsilon_h^+ = \frac{\lambda_t}{\mu C_p} \qquad \varepsilon_u^+ = \frac{\mu_t}{\mu} \qquad (7.12b)$$

U_f étant la vitesse de frottement définie par

$$U_f = U_e \sqrt{\frac{C_f}{2}} \qquad (7.12c)$$

L'équation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial x^+} = \frac{1}{u^+ \varepsilon_u^+} \frac{\partial}{\partial u^+} \left[\left(\frac{\varepsilon_h^+}{\varepsilon_u^+} \right) \frac{\partial T}{\partial u^+} \right] \qquad (7.13.)$$

L'un des résultats intéressants de cette mise en équation est l'expression du flux pariétal, que l'on peut écrire en termes de Stanton :

$$StPr = Sp \sqrt{\frac{C_f}{2}} \qquad (7.14.)$$

Sp est fonction de x^+. Elle a été calculée à partir de (7.13.) en utilisant ε_u^+ une expression dérivée de la loi de paroi de Spalding [14] :

$$\varepsilon_u^+ = 1 + \frac{K}{E} \left[e^{Ku^+} - 1 - Ku^+ - \frac{(Ku^+)^2}{2!} - \frac{(Ku^+)^3}{3!} \ldots \right] \qquad (7.15.)$$

Gardner et Kestin [19] donnent des valeurs de Sp dans le cas d'un chauffage à température de paroi constante. Smith et Shah [20] ont calculé Sq pour un chauffage à flux constant.

Dans l'air, Ishiguro [21] trouve que cette méthode surestime les flux, donc sous-estime la "capacité de balayage". Trinité [25] confirme ce résultat. Cet effet apparaît beaucoup moins sensible dans l'eau [21]. Effectuant des mesures de températures pariétales à flux constant, nous avons constaté également que les températures observées étaient peu supérieures (quelques pour-cent) aux températures calculées à l'aide de la fonction S_q déterminée par Smith et Shah. Nous attribuons ce résultat au fait qu'Ishiguro, bien que travaillant avec un écart de température de 30°C, ne considère pas les effets de variations de propriétés physiques de l'eau évoqués au chapitre 3. Les résultats de Lafay montrent qu'en effet la "capacité de balayage" (reliée au Cf) diminue avec l'écart de température. Toutefois, il est difficile de distinguer l'influence des écarts dus au calcul et à la correction $\sigma_{turb.}$

L'emploi de cette dernière correction reste nécessaire dans l'exploitation d'une simulation thermique dans l'eau. Toutefois, dans le cadre du présent calcul, il nous a paru aussi légitime, en raison des constatations précédentes, de ne pas effectuer la multiplication par σ_{turb}, et de la considérer contenue dans la fonction Sp.

Utilisant leur coefficient de frottement expérimental, nous n'aurons pas non plus, dans cette partie des calculs, à faire intervenir $\bar{\sigma}_{turb.}$. Cette dernière correction garderait cependant toute son importance dans le cas d'un calcul comme celui de 7.1a. C'est pourquoi, il nous a paru intéressant de la développer au chapitre 3.

L'équation (5.16.) s'écrit ici :

$$k(\rho C_e)^{n-1}\, m_w^n = -\int_{x_0}^{x} \frac{U_e}{Sc} \times Sp\left[x^+(x,\xi)\right] \frac{dm}{d\xi}\, d\xi \qquad (7.16.)$$

$$m_w^n(x) = -\frac{U_e}{\nu} \times \frac{D}{k(\rho C_e)^{n-1}} \quad \frac{C_f(x)}{2} \int_{x_0}^{x} Sp\left[\frac{U_e}{\nu}\int_{\xi}^{x} \frac{C_f(\psi)}{2}\, d\psi\right] dm_w(\xi) \qquad (7.17.)$$

Nous résolvons ici cette équation dans deux cas :

1) On peut exprimer le coefficient de frottement par une loi simple, en puissance.

2) La zone catalytique où l'on effectue le calcul est suffisamment petite en regard de son abcisse pour que l'on puisse considérer le coefficient de frottement et par conséquent, la vitesse de frottement connue constante.

1) Exprimons C_f par une loi en puissance (Blasius [9]) :

$$C_f = 0{,}0596\, \bar{R_x}^{0,2} \qquad (7.18.)$$

x^+ s'écrit alors :

$$x^+(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{U_f dx}{\nu} = 0{,}1912\left(\frac{U_e}{\nu}\right)^{0,9} (x^{0,9} - x_0^{0,9}) \qquad (7.19.)$$

Nous chercherons m_w en fonction de la variable η telle que :

$$\eta(x) = 0,1912\ R_x^{a/9} \qquad (7.20.)$$

On a évidemment :

$$x^+ = \eta(x) - \eta(x_0) \qquad (7.21.)$$

L'équation (7.17.) s'écrit :

$$m_w^n(\eta) = - H' \eta^{-1/9} \int_{\eta}^{0} S_p\{\eta - \eta(\xi)\} \frac{dm}{d\eta(\xi)}\, d\eta(\xi) \qquad (7.22.)$$

où

$$H' = 0,1436 \left[\frac{U_e}{\nu} \frac{D}{k(\rho C_e)^{n-1}}\right] \qquad (7.23.)$$

La résolution s'effectue comme en 5.3c et 7.1a : la $k^{ième}$ valeur de m_w se déduit des $(k-1)^{èmes}$ précédents par :

$$\boxed{m_k^n = - H' \eta_k^{-1/9} \sum_{1}^{k} \frac{j_i}{\Delta\eta_i} I_i'} \qquad (7.24.)$$

I_i' prend cette fois une forme un peu différente :

$$I_i' = \int_{\eta_k - \eta_{i-1}}^{\eta_k - \eta_i} S_p(\psi)\, d\psi \qquad (7.25.)$$

Nous avons antérieurement utilisé ce type de calcul [55]. La figure 7.3. montre des profils pariétaux calculés avec H' en paramètre, en présence d'un échelon de catalyse η_0.

Notons ici, qu'à la différence des calculs précédents, les paramètres chimiques ne sont pas contenus dans la variable adimensionnelle d'abcisse, qui ne contient que des variables de déplacement, mais que les concentrations réduites apparaissent sous forme d'un réseau de courbe paramétré pour les variables chimiques et diffusives. La fig. 7.4. montre l'influence de ce paramètre H' dans deux cas particuliers.

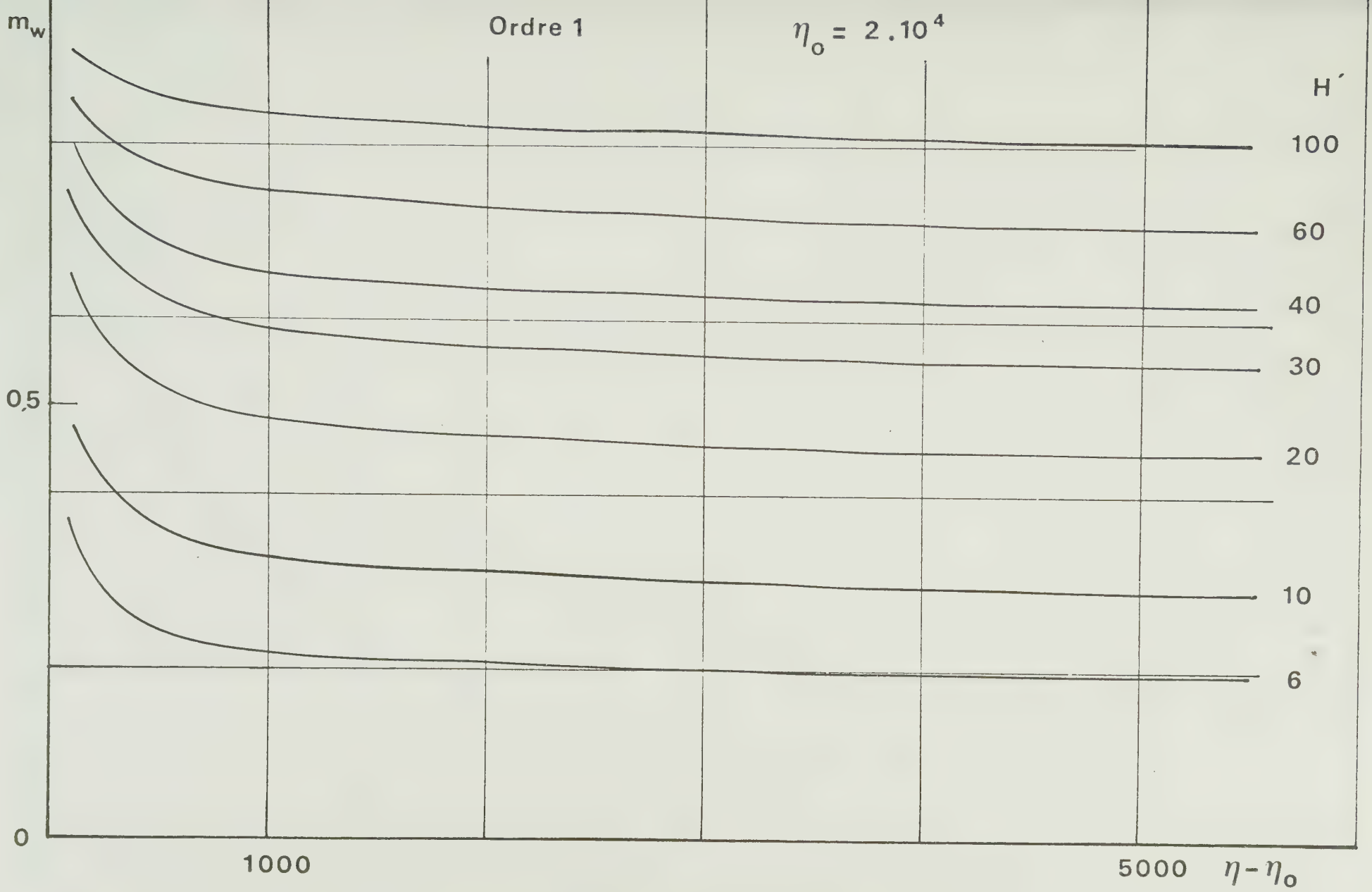


Fig. 7.3. : Profils de concentration pariétale
calculés à partir de (7.24.)

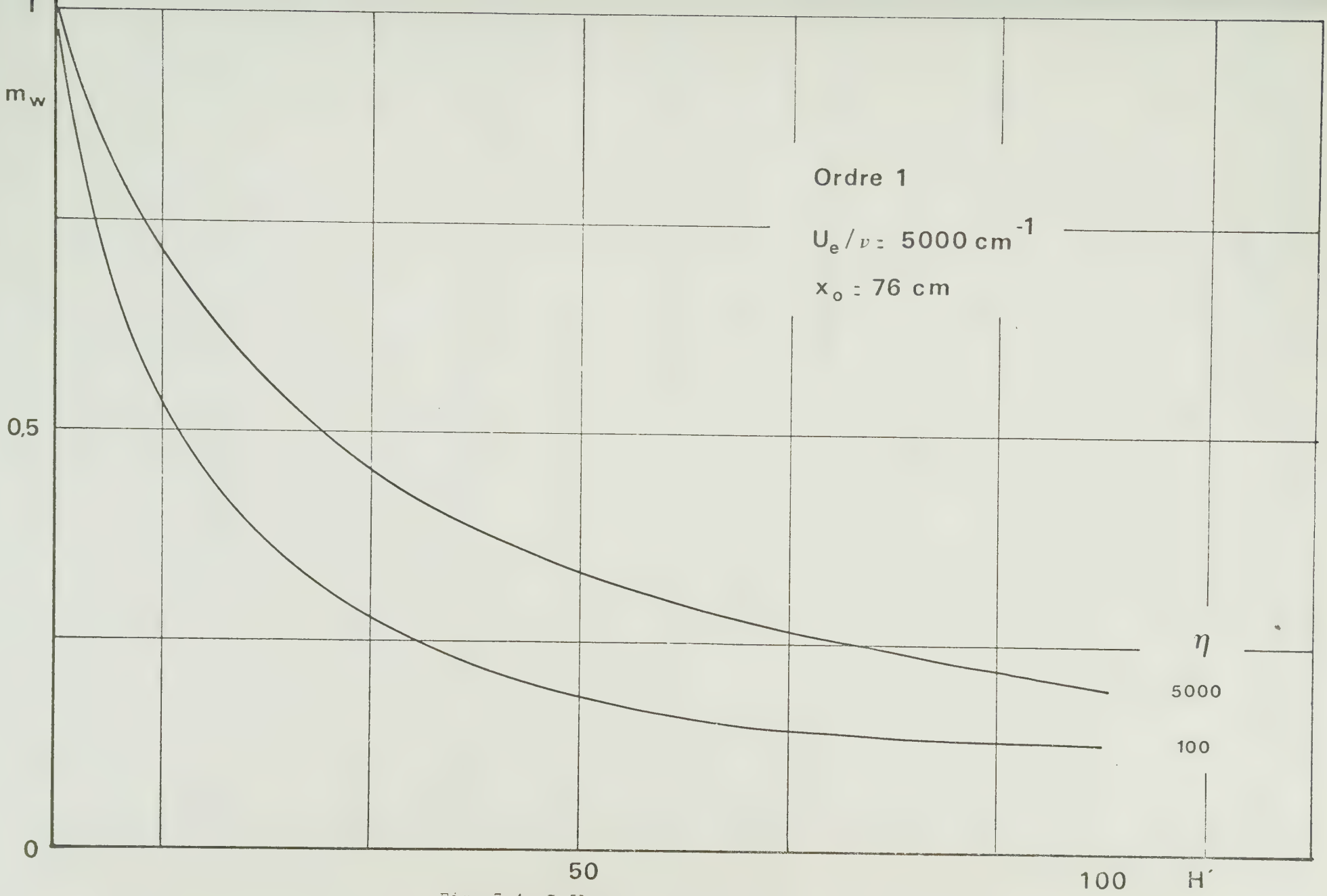


Fig. 7.4. Influence du paramètre H'
dans un cas particulier en deux points du catalyseur

2) Un cas particulier intéressant du problème précédent est celui d'une catalyse où on peut supposer le coefficient de frottement constant. On peut alors définir une vitesse de frottement U_f constante sur l'intervalle (x_0,x) étudié. Introduisons les paramètres :

$$H = \frac{U_f}{\nu} \times \frac{D}{k(\rho C_e)^{n-1}} \qquad (7.26a)$$

et

$$F = \frac{U_f}{\nu} \qquad (7.26b)$$

La variable x^+ prend la forme :

$$x^+ = \int_{x_0}^{x} \frac{U_f dx}{\nu} = F(x-x_0) \qquad (7.27.)$$

Nous pouvons alors écrire (7.17.) :

$$m_w^n(x) = - H \int_{x_0}^{x} Sp\left[F(x-\xi)\right] \frac{dm_w}{d\xi} d\xi \qquad (7.28.)$$

Nous allons chercher $m_w(x)$ comme une fonction de x^+ où x^+ est défini en (7.27.); on a alors :

$$m_w^n(x^+) = - H \int_{0}^{x^+} Sp(x^+-\xi^+) \frac{dm_w}{d\xi^+} d\xi^+ \qquad (7.29.)$$

Comme précédemment, nous divisons l'intervalle $(0,x^+)$ en N segments ; le remplacement de $m_w(x^+)$ par une suite de segments de droite, nous fournit l'expression :

$$\boxed{m_k^n = - H \sum_{1}^{k} \frac{j_i}{\Delta x_i^+} I_i} \qquad (7.30.)$$

où

$$I_i = - \int_{x^+-x_{i-1}^+}^{x^+-x_i^+} Sp(\psi)\, d\psi \qquad (7.31.)$$

7.1c. Calcul des intégrales I_i

Dans les équations (7.24.) et (7.30.) interviennent des expressions intégrales de la fonction Sp. Dans la pratique, nous avons trois moyens d'effectuer ce calcul :

- Pour effectuer le calcul dont on trouve un résultat (fig. 7.3.) [55], nous avons tabulé la fonction $\int_{10}^{x} Sp(\psi)\, d\psi$ et utilisé les valeurs de ce tableau de la même manière que celles des tableaux de G(x) (chapitre 5). Le tableau des intégrales a été établi à partir des valeurs de Sp données par Gardner et Kestin.

- On peut également évaluer I_i ou I_i' dans le cours du calcul, si on connaît une expression analytique de Sp(x). Spalding en propose une [15] de la forme :

$$Sp^4(x^+) = \left[\frac{Pr}{6,76(x^+)^{1/9}+P}\right]^4 + \left[0,53835\left(\frac{x^+}{Pr}\right)^{-1/3}\right]^4 \qquad (7.32a)$$

$$P = 13,4\left(Pr^{3/4} - 1\right) \qquad (7.32b)$$

- Ishiguro [21] utilise Sp sous la forme :

$$Sp(x^+) = a_0 + \sum_{i=1}^{6} a_i (Ln\ x^+)^i \qquad (7.33.)$$

D'un intérêt pratique encore plus grand est l'expression qu'il propose pour l'intégrale de la fonction de Spalding

$$\int_0^{x^+} Sp(\psi)\, d\psi = \left\{c_0 + \sum_{i=1}^{6} c_i\, (Ln\ x^+)^i\right\} x^+ \qquad (7.34.)$$

Le tableau 7.1. reproduit les valeurs des a_i et des c_i proposées par Ishiguro.

Le tableau 7.2. compare les valeurs de $Sp(x^+)$ calculées par Gardner et Kestin [19] à celles tirées de (7.32a) et (7.33.). On voit que ces dernières expressions sont de bonnes approximations de Sp. Notons également que nous avons trouvé une bonne concordance des valeurs de $\int_0^x Sp(\psi)\, d\psi$ calculées numériquement à partir de (7.32a) et les valeurs données par (7.34.).

Fonction de Spalding $Sp(x^+)$	Intégrale de $Sp(x^+)$
a_0 1,03029	c_0 1,54401
a_1 $- 3{,}431143.10^{-1}$	c_1 $- 5{,}13720.10^{-1}$
a_2 $+ 5{,}67714.10^{-2}$	c_2 $+ 8{,}52887.10^{-2}$
a_3 $- 6{,}41328.10^{-3}$	c_3 $- 9{,}50573.10^{-3}$
a_4 $+ 5{,}80052.10^{-4}$	c_4 $+ 7{,}73118.10^{-4}$
a_5 $- 3{,}36835.10^{-5}$	c_5 $- 3{,}86132.10^{-5}$
a_6 $+ 8{,}21612.10^{-7}$	c_6 $+ 8{,}21612.10^{-7}$

Tabl. 7.1. : Coefficients de séries proposées par Ishiguro pour Pr = 7 (d'après [21])

x^+	Gardner - Kestin [19]	Calcul formule (7.34)	Calcul Ishiguro (7.35a)
10	0,4777	0,4787	0,4771
50	0,2813	0,2824	0,2807
100	0,2259	0,2272	0,2266
500	0,1499	0,1488	0,1514
1 000	0,1363	0,1321	0,1352
5 000	0,1227	0,1123	0,1199
10^4	0,1191	0,1108	0,1182
10^5	0,1075	0,1018	0,1089
10^6	0,1008	0,0917	0,1056

Tabl. 7.2. : Fonction de Spalding

7.2. COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

La figure (7.5.) montre la répartition du coefficient de frottement sur la zone de simulation. On voit qu'on peut considérer une variation "normale" en $x^{-0,2}$. Toutefois, il apparaît évident que les résultats du calcul seront très peu différents en considérant un C_f constant (dans le cas de la figure égal à $5,2.10^{-3}$). En faisant cette hypothèse, on reste d'ailleurs dans les limites de la précision expérimentale.

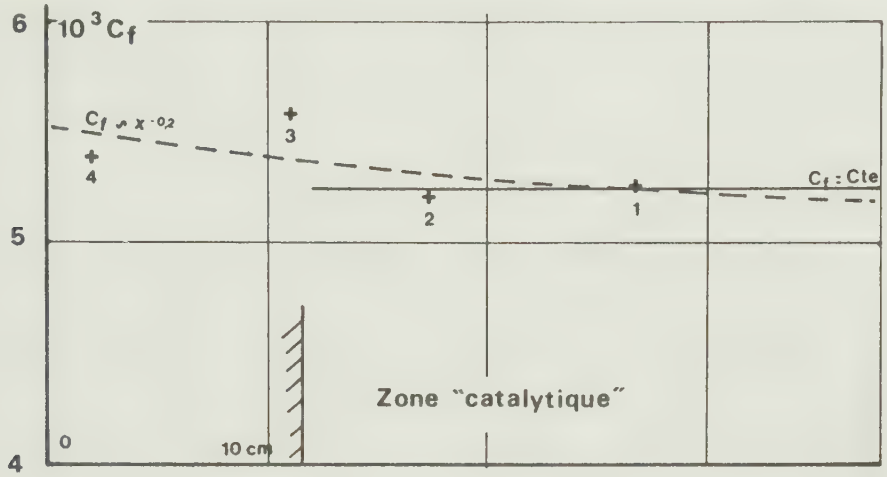


Fig. 7.5.

Nous avons donc calculé les profils théoriques correspondant aux manipulations du chapitre 6 par la dernière méthode décrite en 7.1b. La formulation d'Ishiguro pour $\int_0^x Sp(\psi)\, d\psi$ a été utilisée. Pour le tracé des courbes expérimentales dans le repère θ_w, x^+, H prend, en simulation thermique, la forme :

$$H = \frac{U_f}{\nu} \times \frac{\lambda \Delta T_r}{K} \qquad (7.34.)$$

Notons ici que H peut être considéré comme le produit d'un Nombre de Reynolds, $\frac{U_f L}{\nu}$ par l'inverse d'un nombre de Damkhöler $\frac{k(\rho C_e)^{n-1} L}{D}$.

Les figures (7.6.), (7.7.) et (7.8.) montrent que l'accord entre le calcul précédent et l'expérience est bon. Seul subsiste en général un désaccord sur le premier élément. Toutefois, il est à noter que cette divergence se manifeste sur une échelle bien plus petite que dans le cas du régime laminaire. (Notons également qu'il n'est pas dû à un élément particulier ; effet, on constate le même phénomène pour des éléments origine différents).

Un tel désaccord n'est pas surprenant quand on considère la valeur importante du gradient dm/dx qui se trouve réalisé "en moyenne" sur les premiers éléments. On constate ici encore que cette erreur n'a pas d'effet cumulatif . On

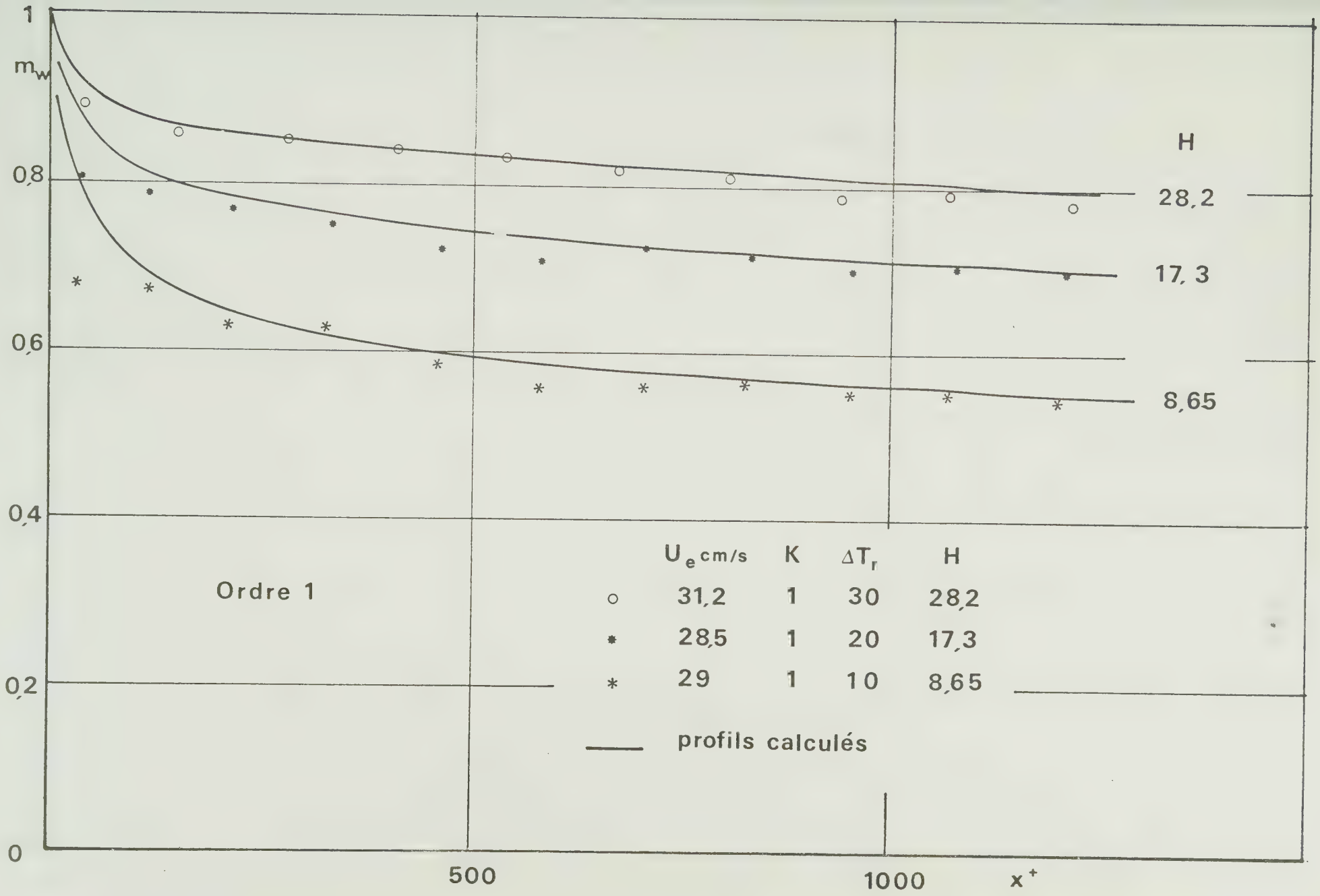


Fig. 7.6. : Comparaison des profils expérimentaux et calculés à l'ordre 1

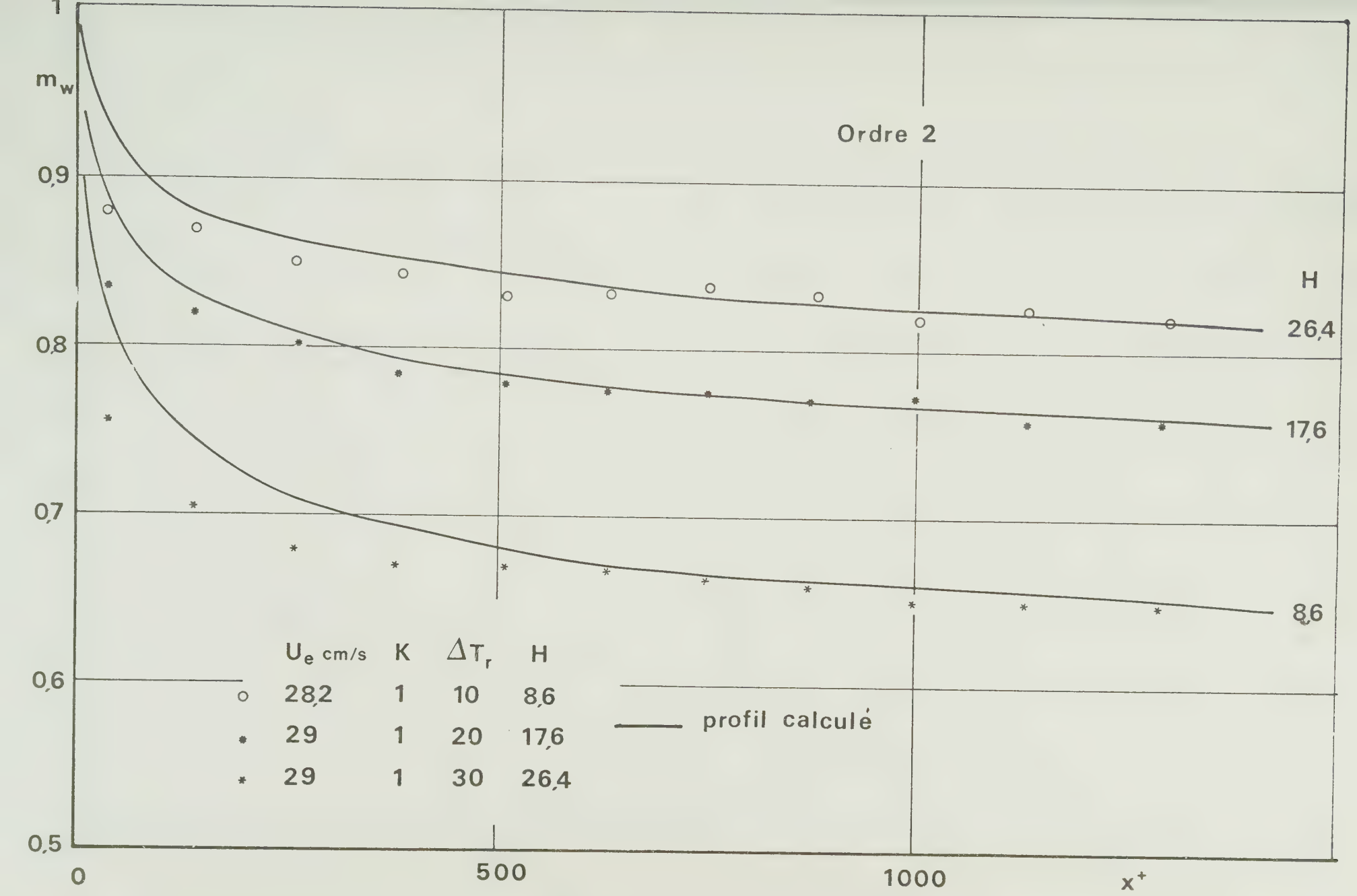


Fig. 7.7. : Comparaison des profils expérimentaux

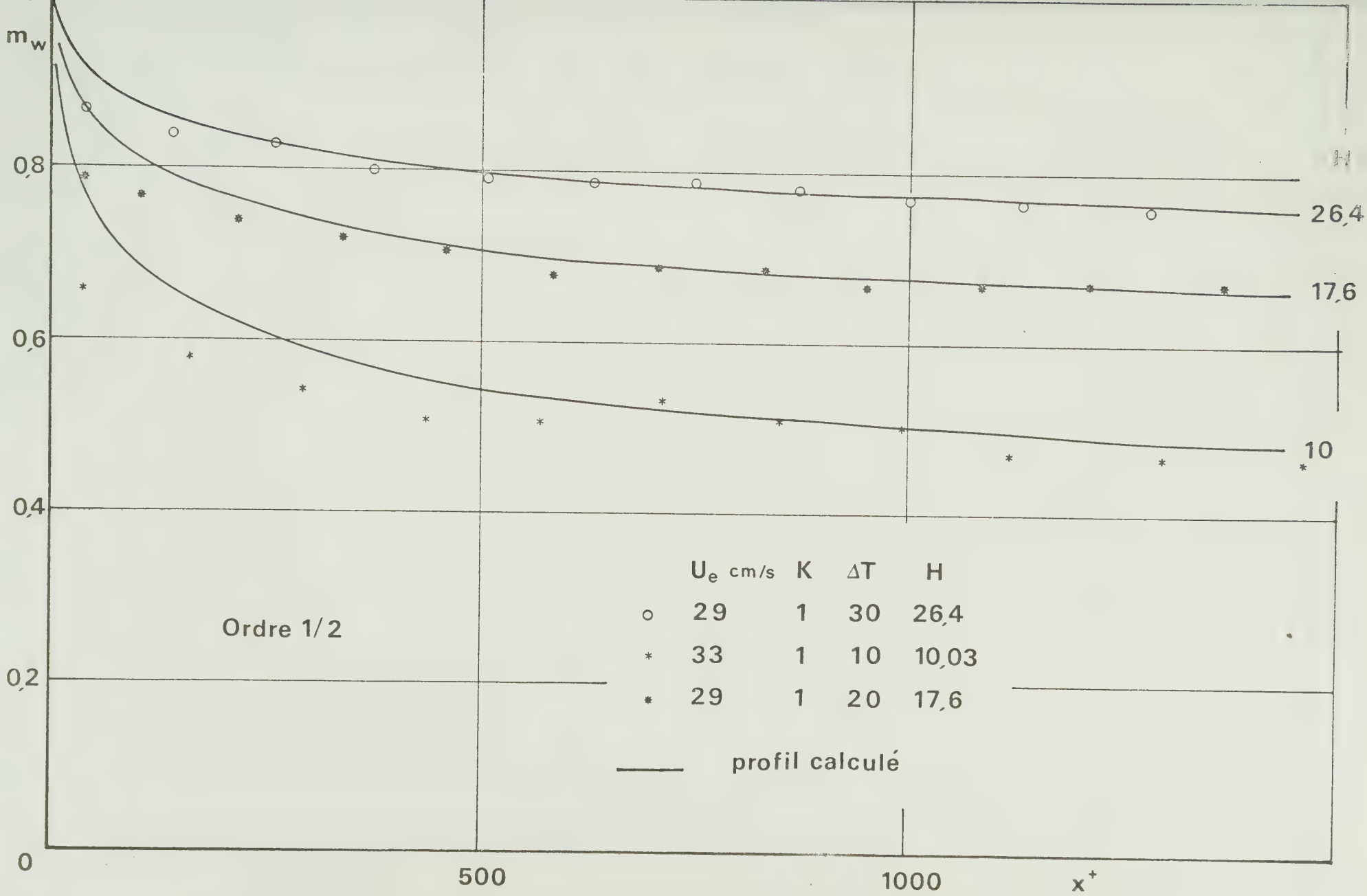


Fig. 7.8. : Comparaison des profils expérimentaux
et calculés à l'ordre 1/2

voit donc sur cet exemple que la simulation thermique apparaît comme un moyen analogique de résoudre les équations de transport par diffusion. Nous allons préciser cette idée au chapitre 8.

Chapitre 8

Les applications de la Simulation thermique

Nous avons, dans les chapitres précédents, considéré le cas particulier d'un catalyseur cylindrique axial. Nous avons confronté les résultats obtenus avec ceux de différents calculs, et nous en avons tiré la conclusion que la simulation thermique peut s'avérer un moyen d'investigation efficace dans le domaine de la réaction pariétale en couche limite.

C'est pourquoi, il nous appartient ici d'en examiner les principales possibilités et limites.

Enfin, pour illustrer ces remarques, nous traiterons rapidement par analogie thermique de deux cas : le sillage catalytique et le réacteur annulaire.

8.1. L'ANALOGIE THERMIQUE

Nous avons présenté, au chapitre 1, l'analogie thermique à l'aide d'un système d'équations valable pour une couche limite. Mais on retrouve le principe de l'analogie dans les équations du mouvement de l'énergie et de la diffusion écrites sous leur forme générale, c'est-à-dire, en régime stationnaire, dans le cas de propriétés physiques constantes :

Continuité $\qquad div\ \rho\vec{U} = 0 \qquad (8.1.)$

Mouvement $$\vec{\gamma} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad}\ p + \nu \Delta \vec{U} \qquad (8.2.)$$

Transport de chaleur $$\frac{D\theta}{Dt} = - div\ a_B \overrightarrow{grad}\ \theta \qquad (8.3a)$$

Transport de masse $$\frac{Dm}{Dt} = - div\ D_A \overrightarrow{grad}\ m \qquad (8.3b)$$

Les systèmes (8.1.), (8.2.), (8.3a) et (8.1.), (8.2.), (8.3b) sont formellement identiques. Les champs de θ et de m sont donc confondus, si :

- Les deux écoulements sont semblables, donc :

$$\nu_A = \nu_B \qquad (8.4a)$$

- Les diffusivités sont égales :

$$D_A = a_B \qquad (8.4b)$$

- Les conditions aux limites sont identiques, c'est-à-dire que les catalyseurs "thermiques" et chimiques doivent avoir même géométrie. Les flux doivent alors avoir des formes identiques. Le flux thermique aura donc la forme :

$$\phi_w = K\theta_w^n \qquad (8.4c)$$

où

$$K = \frac{k(\rho C_e)^{n-1}}{D} \times \lambda \Delta T_r \qquad (8.4d)$$

On retrouve donc, dans un cadre tout à fait général des conditions rappelant celles établies au chapitre 1. Toutefois l'application de l'analogie s'assortit de quelques limitations ; on peut en distinguer deux sortes : les limitations de principe et les limitations expérimentales.

8.1a. Les limitations de principe

- Il ne doit pas y avoir dépendance réciproque, dans la partie chimique du profil, entre profils de température et de concentration. Le coefficient de cinétique k peut être variable dans l'espace, il peut dépendre d'un champ de températures, mais il doit pouvoir être défini strictement à partir des variables

d'espace : ainsi, par exemple, on ne saurait simuler une réaction exothermique où la chaleur dégagée provoquerait un gradient de température, donc un gradient de k : la cinétique devient dans ce cas une des solutions du problème.

- Les conditions (8.4.) de similitude sont évidemment limitatives. Toutefois, dans de nombreux cas pratiques, on peut revenir à la formulation des conditions vue au chapitre 1 : par exemple, dans le cas d'une géométrie axisymmétrique. Alors, seule l'équation de continuité change. On peut la mettre sous la forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial (r^*+y^*)u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial (r^*+y^*)v^*}{\partial y^*} = 0 \qquad (8.5.)$$

En règle générale, dans le cas de couches limites, la condition de simulation peut se résumer par une égalité des nombres de Reynolds ramenée à une échelle du modèle, des nombres de Schmidt et Prandtl, et à la loi (1.17.).

- Le flux de masse provoqué par la réaction chimique doit être suffisamment faible pour que la variation de densité ainsi provoquée n'intervienne pas dans le bilan de quantité de mouvement. On ne peut en effet réaliser expérimentalement par voie thermique l'équivalent d'un écoulement de Stefan-Nusselt [27][51].

- Remarquons également que, paradoxalement, c'est la simulation d'un écoulement avec concentration pariétale constante (vitesse de réaction très rapide), cas le plus simple à traiter théoriquement, qui donne les plus mauvais résultats sur les premiers éléments en simulation thermique : en effet, c'est dans ce cas que l'échelon de température est le plus net.

- Notons enfin que le principe même de l'analogie interdit la simulation de réaction en phase homogène. Toutefois, on peut concevoir l'existence de sources (ou de puits) dans la couche limite, (tel qu'un fil, par exemple).

8.1b. Les limitations expérimentales

- La limitation la plus importante a été mise en évidence au chapitre 5. Il y a un phénomène de "filtrage" au voisinage de l'échelon de catalyse. Ce filtrage est surtout marquant dans nos manipulations en laminaire. Il y a deux moyens de s'en affranchir : soit construire les éléments au voisinage de l'échelon suffisamment petits pour minimiser cet effet. C'est la solution préférable. A défaut, on peut utiliser une correction du type de celle proposée au chapitre 5. Notons que cette correction prend toute sa valeur dans la première solution adoptée, puisqu'elle donne un ordre de grandeur des dimensions de l'élément en regard de l'erreur commise. Il s'agit, en fait, de déterminer une échelle relative au phénomène chimique.

- Ainsi, on voit, qu'en fait, un modèle ne sera véritablement efficace que pour une gamme finie de cinétiques. Plus précisément, une gamme de vitesses étant fixée, la longueur du modèle fixe une échelle à l'étude, donc les limites pour les valeurs des cinétiques simulables.

- Une simulation effectuée dans un courant gazeux peut obliger à des corrections dues au rayonnement. En effet le flux ϕ_w apporté par chauffage de la paroi se décompose en flux convectif, qui sert effectivement à la simulation et un flux radiatif. Le bilan ne s'écrit plus alors suivant (1.17.), mais suivant :

$$\phi_w = K\theta_w^n + \sigma(T_w - T_e)^4 \qquad (8.6.)$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann. On voit donc la nécessité de tenir compte du terme $\sigma(T_w - T_e)^4$.

- Par contre, nous avons vu aux chapitres 3 et 4 que, pour un liquide, les profils dans la couche limite sont, en laminaire du moins, peu exploitables.

- On peut imaginer d'autres types de dispositifs expérimentaux. Ainsi, par exemple, si nous remplaçons, pour chaque élément, les deux bobinages (sonde + résistance de chauffage) par un seul ruban, dont la résistivité varie avec la température, on peut, moyennant un calcul simple,déduire la température de surface de la résistivité du ruban : ainsi la mesure de U et de I dans le ruban donne des informations à la fois sur le flux et la température de surface.

Remarquons que, si nous chauffons à intensité constante, on peut écrire le flux sous la forme :

$$\phi_w = \frac{R_0(1+\alpha' T_w)}{S} I^2 \qquad (8.7.)$$

α' est un coefficient de température dépendant du coefficient α du ruban et de la géométrie. (8.7.) peut prendre la forme :

$$\phi_w = K_0 - K\theta_w \qquad (8.8.)$$

où

$$K_0 = R_0 I^2 [1+\alpha' T_r)]/S \qquad (8.9a)$$

et

$$K = R_0 I^2 \alpha' \Delta T_r / S \qquad (8.9b)$$

On remarquera que (8.8.) est la forme de la cinétique de dissolution de l'ion ferrique dans le cas d'un usinage chimique, comme l'ont montré Saubestre et Marty et Querry [90] [91] [59].

- L'identité des équations implique l'abscence, dans l'expérimentation par voie thermique, de convection naturelle, ou du moins que la convection forcée soit nettement prépondérante par rapport à la convection naturelle. Un critère utile est le rapport du nombre de Grashof au carré du nombre de Reynolds. Notons que dans l'interprétation des résultats présentés ici, nous avons négligé l'action de la convection naturelle.

8.1c. Nous avons cité au chapitre 1 quelques avantages *à priori* des études par analogie thermique : meilleure reproductibilité des résultats, facilités plus grandes pour les mesures de température. Il en est deux sur lesquels nous pouvons particulièrement insister :

- Un dispositif tel que celui que nous avons construit permet, pour une géométrie donnée et divers régimes dynamiques, l'étude sans modification de l'appareillage, de réactions de cinétiques différentes et d'ordres divers. Dans une expérimentation directe, l'étude des répartitions de concentration pour deux réactions distinctes nécessite en général des modifications du dispositif expérimental (nature du catalyseur, conditions de températures, changement des fluides en mouvement...)

- Une telle étude n'est possible que lorsque le champ de concentration recherché est découplé du champ de températures ou éventuellement d'autres champs de concentration. Dans le cas où une telle condition n'est pas réalisée, on ne peut que revenir à l'expérimentation directe et aux calculs. De tels calculs sont en général des résolutions numériques des équations de transport. En régime turbulent, apparaissent dans ces équations des termes de diffusivité turbulente, en général sous la forme de produits de fluctuations moyennés. Les auteurs qui mènent ces calculs par exemple Ng et Spalding [31] ou Barrère et Borghi [67] utilisent souvent pour ces termes, des expressions analytiques semi-empiriques [31] [64] [65] [66]. Outre la complexité des calculs, cette méthode est tributaire de la validité des expressions utilisées. C'est pourquoi, lorsque les critères d'application de l'analogie thermique sont réalisés, notre dispositif possède une particularité intéressante : il reproduit fidèlement la structure (contraintes, fluctuations) de l'écoulement turbulent.

On allie ainsi la possibilité qu'offre le calcul de faire varier plus aisément les paramètres que dans l'étude directe, et l'intérêt d'une expérimentation qui n'entraîne pas l'introduction d'hypothèses simplificatrices.

8.1d. Les études de simulation thermique en régime turbulent appellent en outre les remarques suivantes :

- En écrivant l'identité des systèmes (8.1.) à (8.3a ou b), on fait implicitement l'hypothèse de l'identité des diffusivités turbulentes thermiques et de diffusion. C'est l'hypothèse la plus communément admise ; nous la faisons d'ailleurs systématiquement au chapitre 7.

- Nous ne réalisons par ce procédé qu'une cinétique de paroi reliant deux valeurs moyennes. Nous négligeons donc systématiquement les effets d'une éventuelle fluctuation de la constante de cinétique (sous l'influence d'une fluctuation de température, par exemple). En effet, nous devons écrire le flux moyen sous la forme :

$$\bar{J}_w = \overline{(k+k')(C_w+C_w')} \qquad (8.11.)$$

$$= \bar{k}\,\bar{C}_w + \overline{k'C_w'}$$

c'est le terme $\overline{k'C_w'}$, quand il existe, que l'on ne peut faire apparaître dans l'analogie.

8.1e. Rappelons enfin que les similitudes des équations de transport ne se rencontrent pas uniquement dans le cas de la couche limite avec réaction chimique. On rencontre par exemple une telle analogie des équations entre une couche limite et un problème de diffusion dépendant de la concentration [92], ou dans l'analogie entre un transfert de chaleur instationnaire et un transport de masse avec réaction chimique homogène [93].

8.2. ETUDE DE SILLAGES CATALYTIQUES

Lorsqu'à une zone catalytique succède une zone chimiquement inerte, la concentration pariétale ne redevient pas immédiatement égale à la valeur de l'écoulement extérieur ; il y a une zone de "relaxation" où la couche limite est le siège de transports diffusifs et convectifs sans condition de Fourier à la paroi. Ce problème est traité à l'ordre un dans [45].

Nous avons cherché ici à suivre l'évolution d'une telle concentration pariétale à plusieurs ordres.

Les figures (8.1.) et (8.2.) montrent de tels sillages obtenus par simulation thermique aux ordres 1/2, 1 et 2. Dans une couche limite laminaire, autour du modèle cylindrique.

On remarque que les trois sillages prennent rapidement un aspect identique. Notons toutefois, que dans ce cas particulier, il faut être prudent quant à l'interprétation de telles courbes : en effet, la forme du sillage ne dépend pas seulement du transfert dans la couche, mais des conditions initiales, à savoir le profil dans la couche limite à l'extrémité du catalyseur. Or, nous avons vu que le profil de θ dans la couche limite est influencé par la variation des propriétés physiques de l'eau.

En régime turbulent, l'influence des propriétés moléculaires est moins grand et nous présentons sur la figure (8.3.) des sillages catalytiques réalisés aux 3 ordres.

8.3. ETUDE PAR ANALOGIE THERMIQUE D'UN REACTEUR ANNULAIRE

L'étude de l'influence des paramètres hydrodynamiques sur la cinétique apparente d'une réaction a, du point de vue de l'ingénieur, essentiellement pour but de diminuer au maximum la résistance au transfert due à la couche limite. Cet effet est d'autant plus prépondérant que la cinétique est plus rapide. Montrons ici comment, dans le cas d'un réacteur annulaire, la simulation thermique permet une telle étude.

8.3a. Le dispositif expérimental

Le "réacteur" se compose du modèle cylindrique précédemment décrit au chapitre 2, entouré d'un manchon de 7,8 cm de diamètre intérieur. Une zone d'établissement est constituée d'un cylindre de 15 cm de long en PVC également situé à l'intérieur du manchon. Le cylindre extérieur a une longueur totale de 60 cm et est soigneusement centré sur l'axe du modèle. La fixation de l'ensemble dans la veine reste inchangée.

Nous simulons ainsi un réacteur annulaire. Nous appellerons R le grand rayon et R_1 le petit rayon de l'espace annulaire, χ le rapport R_1/R inférieur à un.

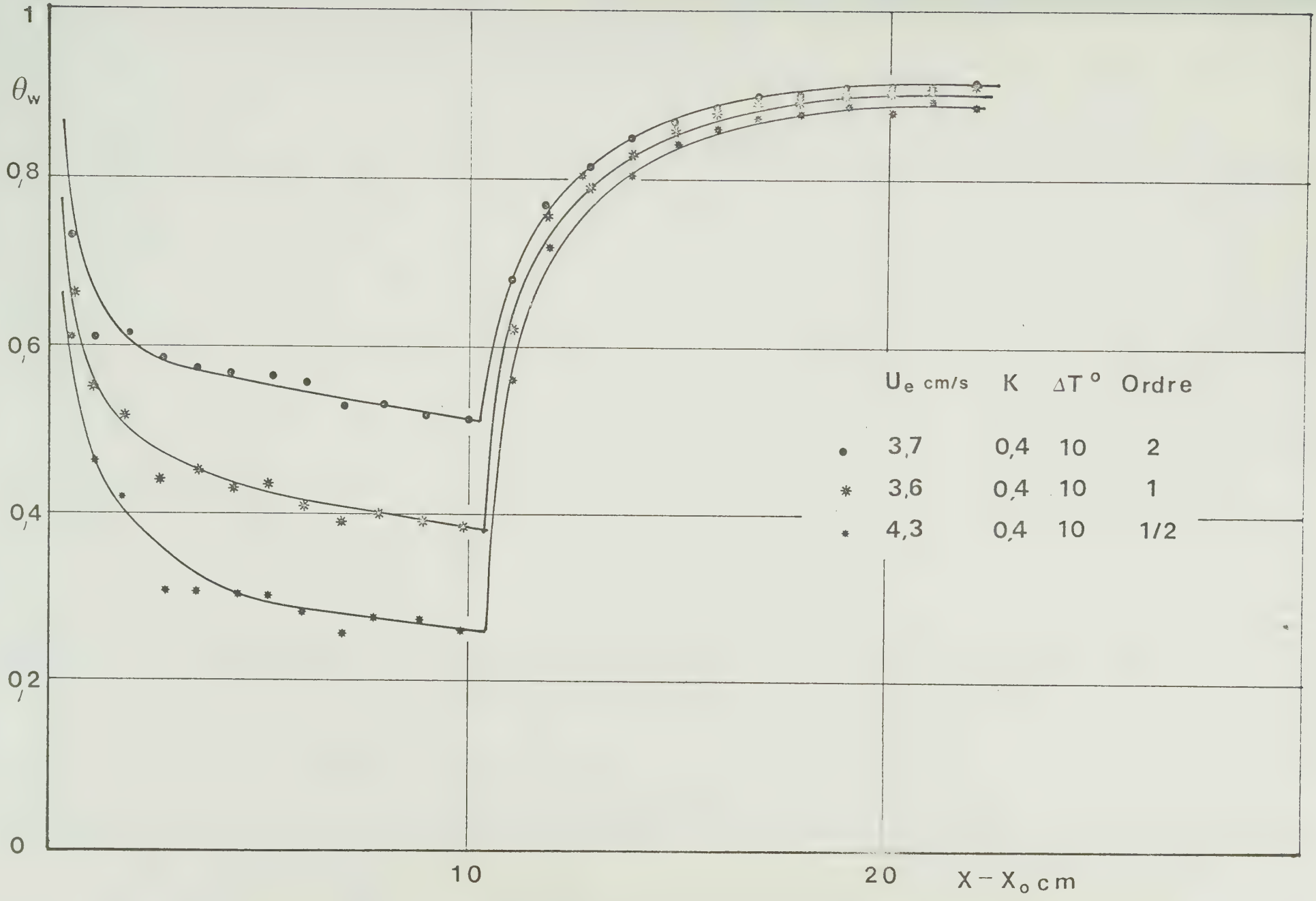


Fig. 8.1. : Sillage catalytique en régime laminaire

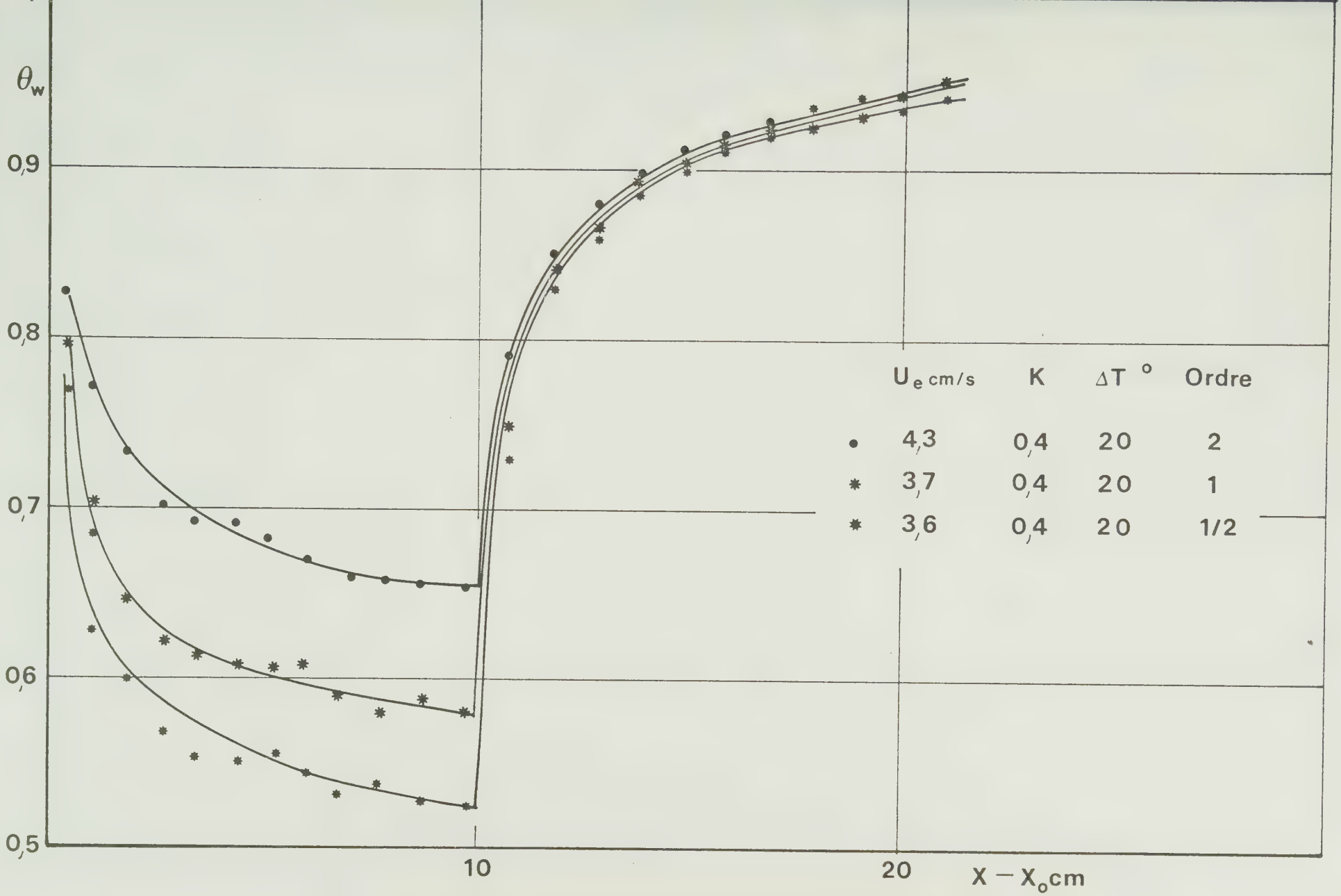


Fig. 8.2. : Sillage catalytique en régime laminaire

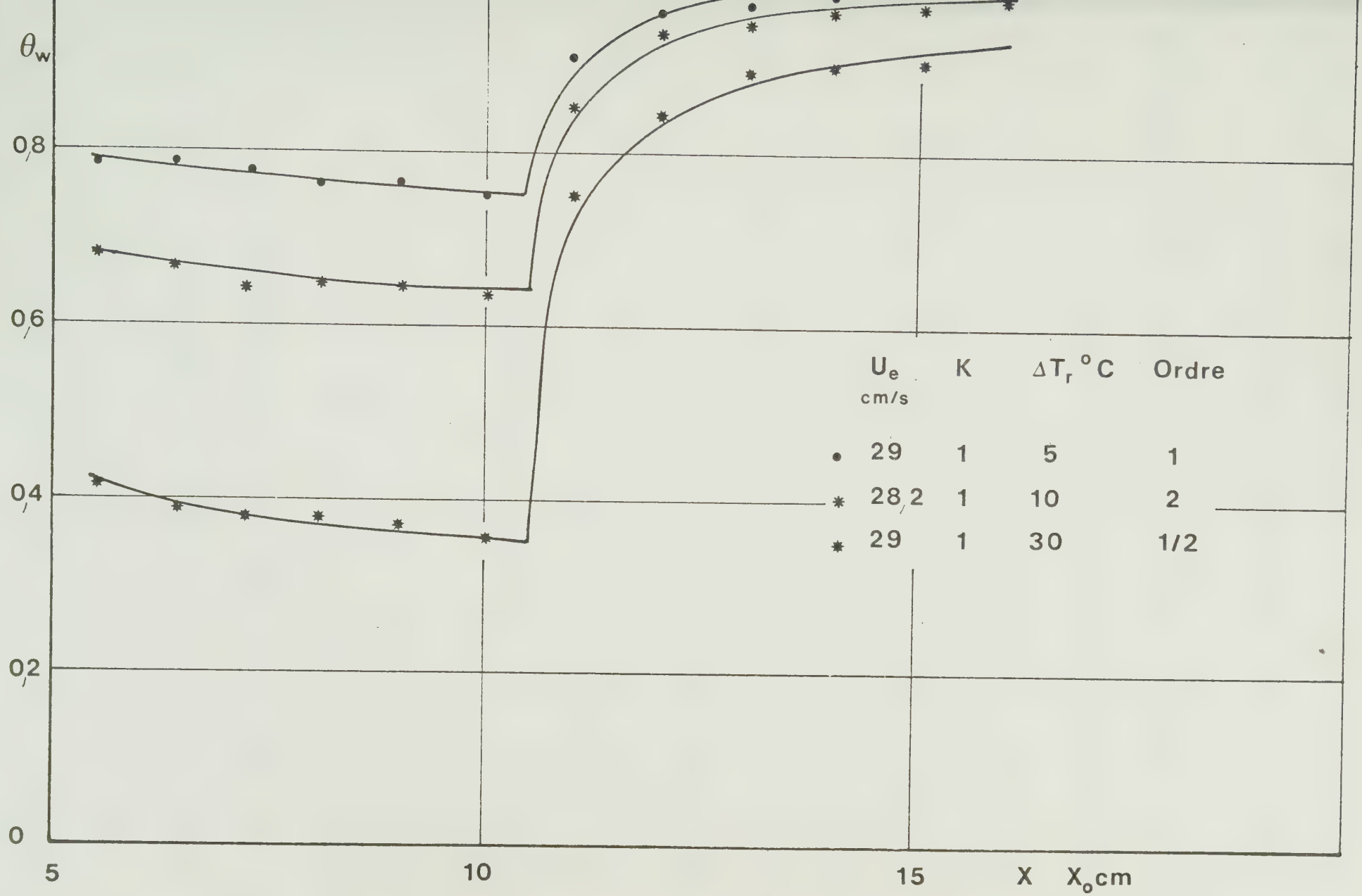


Fig. 8.3. : Sillage catalytique en régime turbulent

8.3b. Conditions de simulation.

Les équations du transfert diffusif dans une géométrie cylindrique s'écrivent :

$$D_1\left(\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial m}{\partial r}\right) + D_2 \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} - u(r) \frac{\partial m}{\partial z} = 0 \qquad (8.12.)$$

D_1 est la diffusivité axiale, D_2 la diffusivité radiale, z la variable axiale, r la variable radiale, nulle sur l'axe.

Exprimons la réaction chimique sur le cylindre intérieur :

$$r = R_1 : \qquad D_2 \left.\frac{\partial m}{\partial r}\right|_{R_1} = k(\rho C_e)^{n-1} m_w^n \qquad (8.13.)$$

u(r), en régime établi, peut s'écrire :

$$u(r) = U_m f\left(\frac{r}{R}, \chi\right) \qquad (8.14.)$$

Ecrivons ce système en variables réduites

$$y = \frac{r}{R} \qquad x = \frac{z}{R} \qquad (8.15.)$$

Supposons de plus que les diffusivités axiales et radiales sont égales à D :

$$\left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}\right) + Pe\ f(y) \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \qquad (8.16.)$$

avec, pour y = χ :

$$\frac{\partial m}{\partial y} - Da\ m^n = 0 \qquad (8.17.)$$

Nous avons introduit les nombres de Péclet et de Damkhöler :

$$Pe = \frac{U_m R}{D} \qquad Da = \frac{k(\rho C_e)^{n-1}}{D} R \qquad (8.18.)$$

Remarquons que la fonction f(y), en régime établi, ne dépend que de y et de χ ; elle est indépendante de la viscosité du fluide et de la vitesse débitante U_m. Donc, à chaque fois qu'on se limite à la partie établie, suffisamment loin de l'origine, il n'y aura pas de condition sur les paramètres dynamiques. Dans les autres cas, il y aurait une condition sur le nombre de Reynolds $U_m R/\nu$.

L'écriture adimensionnelle du transfert de chaleur, écrit en termes de variable θ, nous donne :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + Pe_{th}\, f(y)\, \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \qquad (8.19.)$$

Pe_{th} est le nombre de Péclet thermique :

$$Pe_{th} = \frac{U_m R}{a} \qquad (8.20.)$$

Pour $y = \chi$:

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{\chi} = \frac{\phi}{\lambda \Delta T_r} \qquad (8.21.)$$

Nous trouvons donc comme conditions de simulation les analogues de (1.15.) et (1.17.) :

$$Pe = Pe_{th} \qquad (8.22.)$$

$$\phi = K\theta^n \qquad (1.17.)$$

8.3c. Nous présentons ici les résultats de simulations effectuées aux ordres 1/2, 1 et 2, à l'aide du dispositif décrit en 8.3a, pour des cinétiques K variant de 0,4 à 0,8. Le profil de vitesses à l'entrée de la partie annulaire est supposé droit. Donc, nous confondons la vitesse U_m et la vitesse U_e mesurée au diaphragme.

La figure (8.4.) montre l'influence de l'ordre, à ΔT_r fixé. Sur cette figure, nous avons représenté le résultat d'une simulation d'ordre un et de même cinétique effectuée sans dispositif annulaire. On voit que la décroissance des concentrations est plus rapide dans l'espace annulaire.

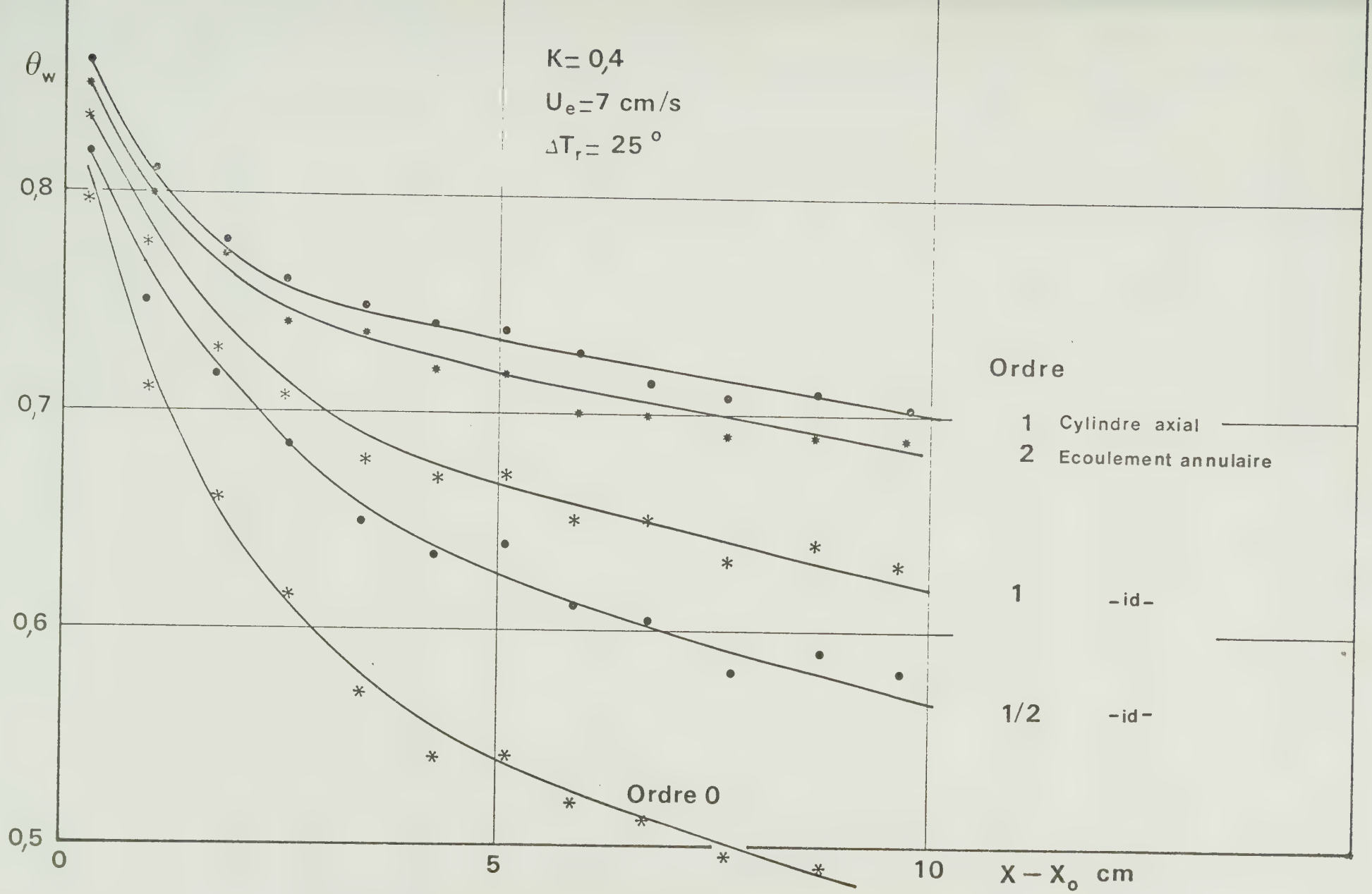


Fig. 8.4. : Profils de concentration pariétale
dans un réacteur annulaire : influence de l'ordre

La figure (8.5.) montre l'influence de la cinétique réactionnelle à la vitesse de 4 cm/s. La figure (8.6.) montre ces mêmes courbes portées en coordonnées logarithmiques, en fonction du temps de séjour moyen des molécules de réactif, défini par $\bar{t} = Rx/U_m$. A l'ordre un, on peut décomposer les profils en deux zones : une zone de forte décroissance et une zone de décroissance exponentielle.

8.3d. Houzelot [62] a étudié expérimentalement et théoriquement cette zone de décroissance exponentielle. Il nous a paru intéressant de comparer les résultats obtenus ici aux siens. La comparaison portera plus précisément sur la valeur de la pente de l'exponentielle.

On peut ramener la connaissance du transfert au calcul d'un nombre de Sherwood global. Pour cela définissons les nombres de Sherwood global, homogène et hétérogène :

$$\mu_G = \frac{2\chi}{(1-\chi^2)} R \frac{J_w}{\rho C_m D} \qquad (8.24)$$

$$\mu_C = \frac{2\chi}{1-\chi^2} R \frac{J_w}{\rho D(C_w - C_m)} \qquad (8.25)$$

$$\mu_0 = \frac{2}{1-\chi^2} R \frac{J_w}{\rho D C_w} = \frac{2}{1-\chi^2} R \frac{k}{D} \qquad (8.26.)$$

Soit μ_C^∞ la valeur de μ_C à l'infini.

Nous avons vu qu'à partir d'une certaine abcisse, on pouvait écrire :

$$m(x,y) = g(y) \exp(-\lambda x) \qquad (8.27.)$$

Un bilan de matière sur une couronne, nous permet d'écrire, vu la définition de μ_G, que lorsque λ est bien plus petite que Pe :

$$\mu_G = \lambda Pe \qquad (8.28.)$$

Comme dans [61], Houzelot représente la solution donnant μ_G sous la forme :

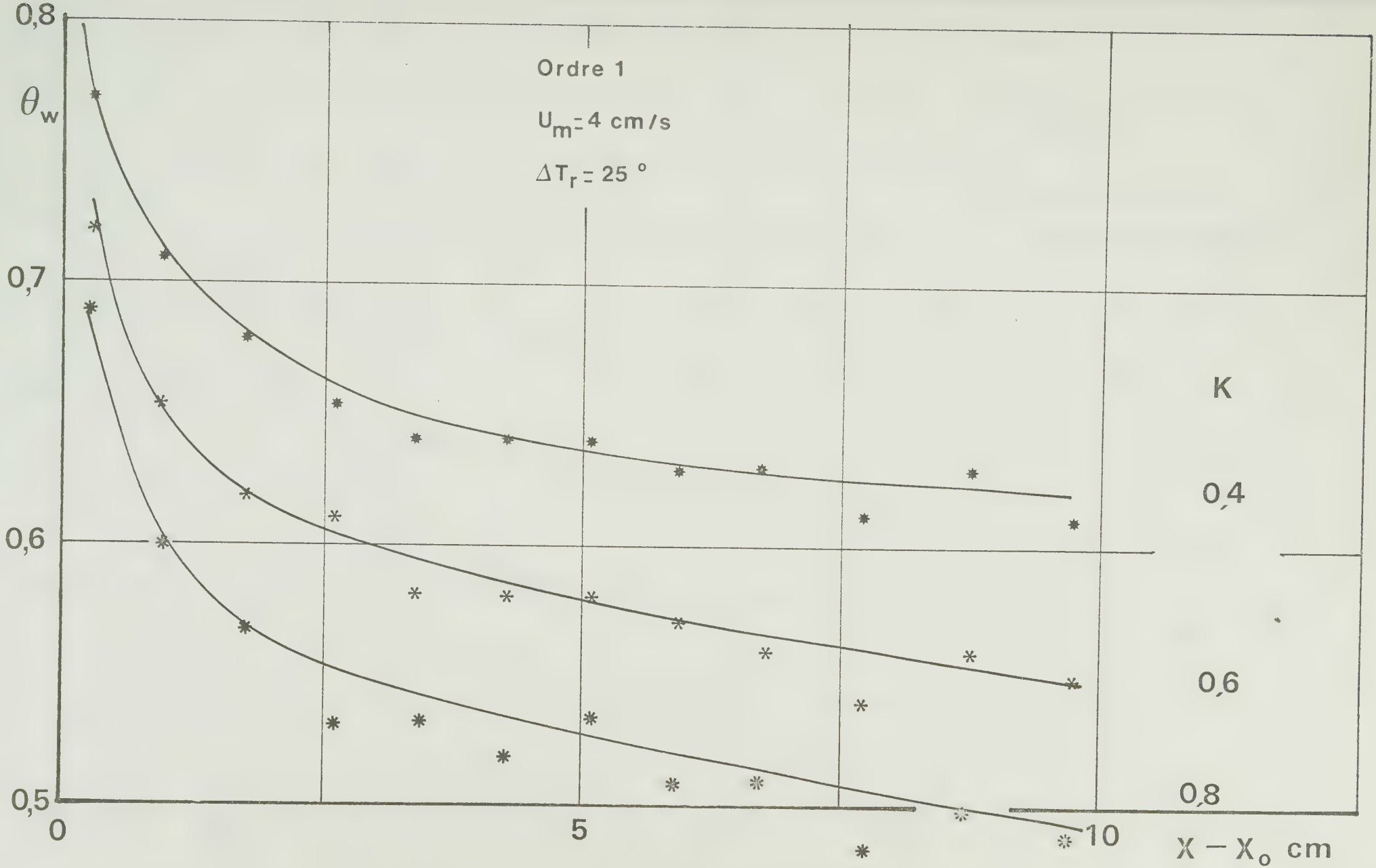


Fig. 8.5. : Profils de concentration pariétale
dans un réacteur annulaire : influence de la cinétique

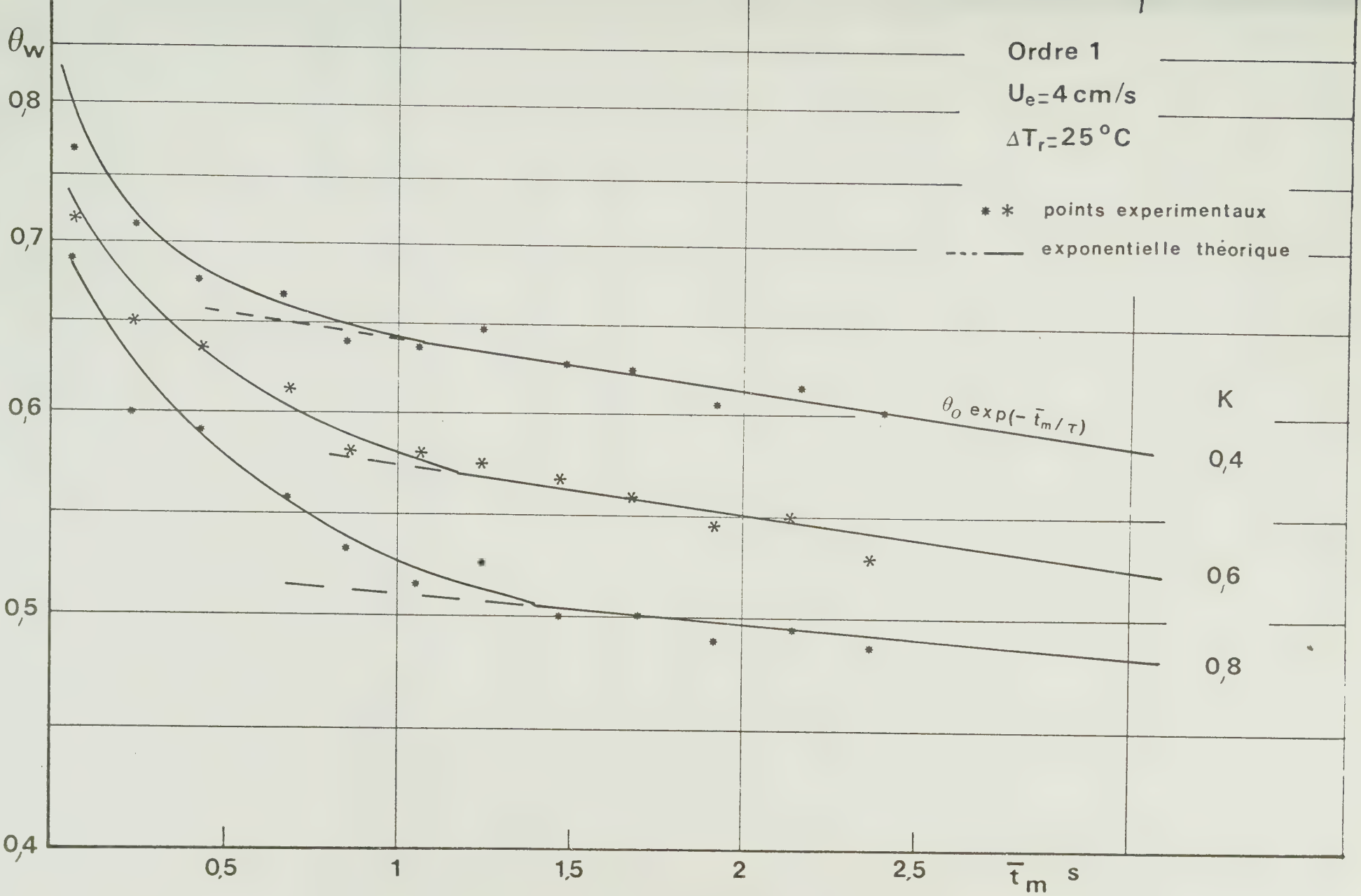


Fig. 8.6. : Comparaison des résultats de la figure 8.5.
avec les résultats du calcul

$$\frac{1}{\mu_G} = \frac{\Phi}{\mu_o} + \frac{1}{\mu_C^{\infty}} \qquad (8.29.)$$

Dans le cas d'un catalyseur en y = χ, il trouve :

$$\mu_C = 0,823 \exp\left[\frac{4,5\chi}{1-\chi^8}\right] \qquad (8.30.)$$

$$\Phi = 1-\alpha\chi(\chi-\beta) \qquad (8.31.)$$

où α et β sont des fonctions du nombre de Damkhöler [62].

Dans le cas de nos conditions expérimentales, nous trouvons les valeurs numériques suivantes :

K	0,4	0,6	0,8
Da	44,57	66,85	89,1
$10^3\lambda$	26	33,5	39

Nous vérifions à postériori que λ est bien toujours inférieur au nombre de Péclet qui est ici de l'ordre de 10^4.

Nous avons tracé sur la figure (8.6.) des droites correspondant aux λ du tableau précédent. On voit que les valeurs calculées sont en bon accord avec l'expérience.

Il est intéressant de remarquer que les résultats de cette simulation thermique ne se limitent pas à la zone exponentielle, mais contiennent la zone de décroissance rapide. De plus, sans le changement du dispositif expérimental qu'aurait exigé une étude chimique directe, on a obtenu des résultats pour des réactions d'ordres différents.

Conclusion

La similitude des équations de transport de masse et de chaleur permet sous certaines conditions de remplacer l'étude d'un phénomène diffusif avec réaction chimique pariétale par un phénomène de convection thermique. Cette idée n'ayant auparavant été exploitée que dans le cas de réaction d'ordre un, nous avons construit un dispositif permettant une telle simulation pour des ordres de réactions quelconques, et nous l'avons appliqué à l'étude d'un réacteur cylindrique axial extérieur.

L'intérêt d'un tel dispositif étant de pouvoir faire varier, sans changement d'interface réactionnelle, les différents paramètres influençant les répartitions de concentration, une étude systématique des profils de concentration pariétale a mis en évidence le rôle de chacun de ces paramètres.

Nous avons comparé les résultats de l'étude expérimentale, menée en régimes laminaire et turbulent, dans le cas d'un échelon de catalyse, à des profils calculés. La concordance est en général bonne. Une divergence au voisinage du début de la catalyse nous a permis de mettre en évidence l'importance de la grandeur des éléments en regard de l'échelle de longueur caractéristique du phénomène. Pour le calcul, nous avons utilisé le principe de superposition.

Le noyau de l'intégrale dépend du coefficient de convection. Nous avons effectué ce calcul en partant des coefficients donnés par Eckert, en régime laminaire, Rubesin, Seban et Spalding, en régime turbulent. La résolution des équations a été notablement simplifiée par l'introduction de fonctions calculées par Hartnett.

Enfin, après avoir tenté de dégager les règles essentielles de l'application de l'analogie thermique, nous avons, après une rapide étude de sillages catalytiques, traité de l'étude par simulation thermique d'un réacteur annulaire.

Nous pensons donc avoir montré ici que la simulation thermique simplifie, dans de nombreux cas, l'étude de la couche limite avec réaction pariétale. On peut donc concevoir le présent travail comme le point de départ d'une étude de réacteurs de géométries diverses.

Annexe 1

CALCUL DES PERTES THERMIQUES DANS LE MODELE

Nous avons posé en 2.3. que toute la chaleur dissipée par effet Joule dans les fils de chauffage est transmise au fluide. Toutefois la conductibilité thermique λ_w du matériau qui constitue le support du modèle n'est pas nulle (elle est d'environ 5.20^{-4} cal/°cm.s. Une partie du flux est donc transmise par conduction vers l'intérieur du cylindre. Nous allons ici effectuer le calcul de ces pertes dans les conditions expérimentales les plus défavorables : nous supposerons que la température de l'air inclus au centre du modèle est la plus basse possible, T_0, que nous identifierons à la température d'écoulement extérieur du fluide.

Les fils de chauffage sont séparés de l'interface "réactionnelle" par une épaisseur d'adhésif double-face et éventuellement, une mince épaisseur de colle. Leur température est donc supérieure à celle de cette surface. Dans le calcul des flux à l'intérieur du modèle, c'est donc leur température qui constituera la condition aux limites extérieure. Une bonne approximation de cette répartition de température peut être donnée par une expression linéaire ; en prenant l'origine des coordonnées axiales à une extrémité de l'élément, et en orientant cet axe dans le sens de l'écoulement, on peut écrire :

$$T = T_1 + Az$$

A l'intérieur du modèle, nous supposons la température constante.

Le problème sera écrit dans le système de coordonnées (3.2.) schématisé par la figure A.1.1.

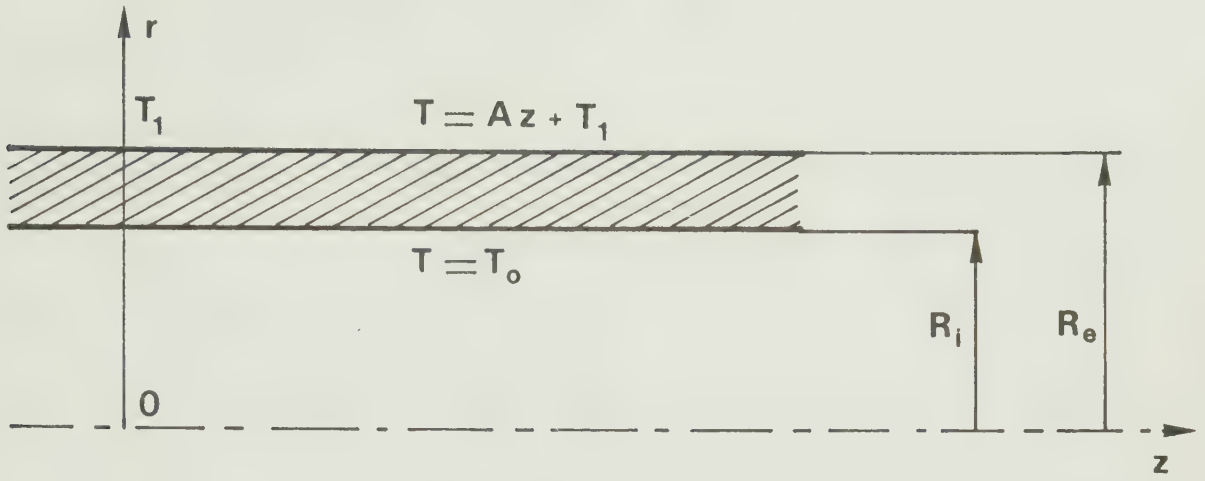


Fig. A.1.1.

Nous calculerons la répartition des températures, puis des flux, en régime stationnaire.

Nous avons donc à résoudre l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (A.1.1.)$$

avec les conditions aux limites :

$$r = R_e \qquad T_e = Az + T_1 \qquad (A.2a)$$

$$r = R_i \qquad T = T_0 \qquad (A.1.2b)$$

Nous cherchons T(r,z) sous la forme :

$$T(r,z) = \phi(r)z + \psi(r) \qquad (A.1.3.)$$

$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ est nul, donc ϕ et ψ sont de la forme :

$$\phi(r) = C_{\phi 1}\ Lnr + C_{\phi 2} \qquad (A.1.4a)$$

$$\psi(r) = C_{\psi 1}\ Lnr + C_{\psi 2} \qquad (A.1.4b)$$

Les conditions aux limites

$$T(R_e, z) = Az + T_1 \qquad (A.1.5a)$$

$$T(R_i, z) = T_0 \qquad (A.1.5b)$$

nous donnent les valeurs des constantes

$$C_{\phi 1} = \frac{A}{\chi} \qquad (A.1.6a)$$

$$C_{\phi 2} = A\left(1 - \frac{\kappa}{\chi}\right) \qquad (A.1.6b)$$

$$C_{\psi 1} = \frac{T_1 - T_0}{\chi} \qquad (A.1.6c)$$

$$C_{\psi 2} = T_1 - \frac{(T_1 - T_0)\kappa}{\chi} \qquad (A.1.6d)$$

où

$$\kappa = Ln\ R_e \qquad (A.1.7a)$$

$$\chi = Ln\ R_e - Ln\ R_i \qquad (A.1.7b)$$

La densité de flux en un point d'abcisse z est la composante de deux flux perpendiculaires entre eux :

$$\phi_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad et \quad \phi_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \qquad (A.1.8.)$$

la valeur de ce flux est alors :

$$\phi^2 = \phi_r^2 + \phi_z^2 \qquad (A.1.9.)$$

On a, pour $r = R_e$:

$$\phi_r = \frac{\lambda}{\xi R_e}\left[Az + (T_1 - T_0)\right] \qquad (A.1.10a)$$

$$\phi_z = \lambda A \qquad (A.1.10b)$$

Soit l'expression des pertes thermiques au point z :

$$\phi(z) = \left\{\frac{(Az + T_1 - T_0)^2 + A^2}{\chi R_e}\right\}^{1/2} \qquad (A.1.11.)$$

En intégrant sur la longueur d'un élément, on aura la perte thermique totale. Nous pouvons avoir ainsi une valeur majorée de ce flux :

Nous prenons pour T_0 sa valeur au début de la manipulation. Les pertes thermiques ayant tendance à échauffer l'air inclus dans le centre du modèle, cette hypothèse est pessimiste.

Pour un flux de 1 watt/cm^2 (flux maximal utilisé ici), c'est-à-dire environ 25.10^{-2} cal/cm^2.s, nous majorerons l'échauffement des fils de chauffage en prenant :

$$T_1 - T_0 = 25°C$$

A est de l'ordre de 1°C/cm.

Prenons un élément de 1 cm de long, la densité de flux de pertes $\phi_t(z)$ sera :

$$\phi_t = \int_0^1 \phi(z)\,dz \qquad (A.1.12.)$$

$\phi(z)$ croît avec z, donc on aura :

$$\phi_G < \phi(1) \qquad (A.1.13.)$$

$\phi(1)$ étant calculé par (A.1.11), ce qui donne

$$\phi_t < 0,84.10^{-2}\ cal/cm^2.s$$

En raison des hypothèses adoptées, nous pouvons dire que les pertes thermiques sont toujours inférieures à 3,4 %.

Annexe 2

INFLUENCE DE LA DIMENSION DES ELEMENTS EN REGIME LAMINAIRE

Nous avons mis en évidence au chapitre 5 l'influence de la grandeur du premier élément des modèles sur les résultats de la simulation. Cette annexe a pour but de la chiffrer.

Nous avons vu (chapitre 2) que nous ne réalisons pas continuement la loi (1.17.), mais que sur la longueur L d'un élément nous avons, en moyenne :

$$\bar{J}_w = K\bar{\theta} \qquad (A.2.1.)$$

$\bar{\theta}$ est la moyenne sur L de la variable réduite θ. C'est la variable obtenue avec la moyenne de la température sur cet élément. En effet :

$$\bar{\theta} = \frac{1}{L}\int_x^{x+L} \theta\, dx = \frac{1}{L}\int_x^{x+L} \frac{T_r - T_w}{T_r - T_e}\, dx$$

$$\bar{\theta} = \frac{T_r - \bar{T}_w}{T_r - T_e} \qquad (A.2.2.)$$

Ecrivons (A.2.1.) pour le premier élément. Supposons, pour simplifier le calcul, que la catalyse débute à l'origine de la couche limite. Ce premier élément est plan et de longueur L.

Réaliser la condition (1.17.) sur cet élément signifie que l'on chauffe avec un flux constant K_m, tel que :

$$\bar{J}_\omega = K_m = K\bar{\theta} \qquad (A.2.3.)$$

Définissons les variables réduites (Chapitre 1) qui peuvent prendre la forme :

$$z = \frac{xK^2}{\omega} \quad ; \quad Z = \frac{LK^2}{\omega} \qquad (A.2.4a)$$

Ecrivons les variables correspondantes basées sur le flux K_m :

$$\tilde{z} = \frac{xK_m}{\omega} \quad ; \quad \tilde{Z} = \frac{LK_m^2}{\omega} \qquad (A.2.4b)$$

w, dans le cas de la simulation thermique, s'écrit :

$$\omega = (\lambda \ \Delta T_r \ \theta \sqrt{\frac{U_e}{\nu}})^2 \qquad (A.2.5.)$$

Dans le cas d'un chauffage à flux constant K_m, nous pouvons écrire, en utilisant la méthode de Rosner (solution de l'équation 5.18., pour M(x,0) ≡ 2)

$$\theta(\tilde{z}) = 1 - \frac{\tilde{z}}{2} \qquad (A.2.6.)$$

soit, en moyennant de 0 à L :

$$\bar{\theta} = \int_0^{\tilde{Z}} \theta(\tilde{z}) d\tilde{z} = 1 - \frac{2}{3\sqrt{2}} \sqrt{\tilde{Z}} \qquad (A.2.7.)$$

(A.1.3.) s'écrit alors :

$$K_m = K\left(1 - \frac{2}{3\sqrt{2}} \sqrt{Z}\right) \qquad (A.2.8.)$$

Remarquons que :

$$\tilde{Z} = Z\left(\frac{K_m}{K}\right)^2 \qquad (A.2.9a)$$

et que d'après (A.2.3.) :

$$\bar{\theta}(Z) = \frac{K_m}{K} \qquad (A.2.9b)$$

On réécrit donc (A.2.8.) :

$$\bar{\theta}(Z) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{2}}\sqrt{Z}\,\bar{\theta}(Z) \qquad (A.2.10)$$

d'où l'expression de $\bar{\theta}(Z)$:

$$\bar{\theta}(Z) = \frac{1}{1 + 0{,}471\sqrt{Z}} \qquad (A.2.11)$$

Il est intéressant de comparer la valeur en fin d'élément de $\theta_{mesuré}$ à la valeur du θ de la réaction vraie correspondant. En effet, le second élément va opérer la simulation en fonction de cette valeur, qui est plus éloignée de la valeur vraie, que les valeurs moyennes ne le sont entre elles.

Ecrivant θ suivant (A.2.6.) et tirant l'expression de K_m, flux simulant, de (A.2.9.) et (A.2.11.), on trouve :

$$\boxed{\theta_f = 1 - \frac{1}{1 + 0{,}471\sqrt{Z}}\sqrt{\frac{Z}{2}}} \qquad (A.2.12.)$$

Nous avons calculé la différence $\theta_f - \theta_{réel}$ et nous avons constaté que cette différence est positive. Nous avons tracé sa variation en fonction de Z, qui chiffre la longueur du premier élément. Un tracé sur papier Log-Log permet de voir qu'on peut admettre, dans ces référentiels, une représentation linéaire de l'erreur.

Donc, en règle général, la simulation thermique a tendance à donner, au début de la catalyse, des concentrations réduites plus faibles (donc à exagérer le transport par réaction chimique) que ne le prévoit le calcul concernant une réaction vraie ; cette erreur croît avec la longueur des premiers éléments.

Nous avons constaté expérimentalement (chapitre 5) que cette différence s'estompe en règle générale sur une longueur de l'ordre du tiers de l'échelon. Nous proposons donc l'expression suivante pour l'erreur commise :

$$\theta_{réel} - \theta_{simulé} = 0,1\ Z^{0,76}\ exp - \frac{3Z}{Z_0} \qquad (A.2.13.)$$

La partie $0,1\ Z^{0,76}$ provient du calcul précédemment décrit, l'exponentielle est une conséquence de notre dernière remarque.

Nous n'avons pu établir une telle formule dans le cas général d'un échelon de catalyse. Toutefois, lorsqu'une correction est nécessaire, l'approximation précédente nous paraît suffisante.

Nous pensons toutefois que cette expression prend tout son intérêt au moment de la conception du modèle : elle permet en effet de déterminer une *échelle* de longueur relative aux phénomènes catalytiques et diffusifs dont on envisage l'étude.

La formule A.2.13 peut donc être utilisée :

1) pour déterminer la grandeur maximale des premiers éléments compatibles avec une gamme de cinétiques et une précision données.

2) lorsque ce n'est pas possible, pour évaluer l'erreur commise et la corriger.

Annexe 3

JUSTIFICATION D'UNE CORRECTION DUE
A LA COURBURE TRANSVERSALE PORTANT SUR θ

Nous calculons, au chapitre 5, les effets de la courbure transversale sous la forme d'une correction sur le paramètre θ. Il nous a paru nécessaire de montrer ici où se situe l'approximation.

Dans le cas d'une plaque plane sans gradient de pression, nous pouvons écrire le coefficient de convection sous la forme, en régime laminaire [16] :

$$h(x,x_0) = \theta \frac{R_x^{0,5}}{x} (\rho D)\ g\left(\frac{x_0}{x}\right) \qquad (5.18.)$$

Dans le cas d'un écoulement autour d'un cylindre axial, nous avons vu au chapitre 3 que ce coefficient de convection est modifié comme le coefficient de frottement, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire :

$$h(x,x_0) = \theta \frac{R_x^{0,5}}{x} (\rho D)\ g\left(\frac{x_0}{x}\right)\left[1 + 0,525\ \xi\right] \qquad (A.3.1.)$$

où ξ est défini par :

$$\xi = \frac{4}{r}\sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} = \frac{a\sqrt{x}}{0,525} \qquad (A.3.2.)$$

m_w est alors solution de l'équation :

$$m_w^n(x) = \frac{1 + a\sqrt{x}}{\sqrt{Gnx}} \int_{x_0}^{x} g\left(\frac{\psi}{x}\right) \frac{dm}{d\psi}\, d\psi \qquad (A.3.3.)$$

Introduisant la variable :

$$\overset{0}{z} = \frac{Gnx}{(1+a\sqrt{x})^2} \equiv \frac{z}{(1+b\sqrt{z})^2} \qquad (A.3.3a)$$

où

$$b = \frac{a}{\sqrt{Gn}} \qquad (A.3.3b)$$

On trouve que m_w exprimé en fonction de la variable $\overset{0}{z}$ est solution de l'équation :

$$m_w^n(\overset{0}{z}) = \frac{1}{\sqrt{\overset{0}{z}}} \int_{\overset{0}{z}_0}^{\overset{0}{z}} g\left[\frac{\overset{0}{\zeta}}{\overset{0}{z}} \times \left(\frac{1+b\sqrt{\zeta}}{1+b\sqrt{z}}\right)^2\right] dm(\overset{0}{\zeta}) \qquad (A.3.4.)$$

Lorsque nous considérons, au chapitre 5, que m_w est la solution de (5.48.) où l'on remplace dans z la constante θ_{cst} par l'expression $\theta(1+a\sqrt{x})$, nous remplaçons implicitement $m_w(\overset{0}{z})$ par la fonction $\bar{m}_w(\overset{0}{z})$ solution de :

$$m_w^n(z) = \frac{1}{\sqrt{\overset{0}{z}}} \int_{\overset{0}{z}_0}^{\overset{0}{z}} g\left(\frac{\overset{0}{\zeta}}{\overset{0}{z}}\right) d\bar{m}(\overset{0}{\zeta}) \qquad (A.3.5.)$$

Notons qu'on pourrait résoudre l'équation (A.3.4.) par la méthode exposée au chapitre 5 en remplaçant les Γ_i^k par des $\overset{0}{\Gamma}{}_i^k$ définis par :

$$\overset{0}{\Gamma}{}_i^k = \int_{\substack{\overset{0}{z}_{i-1} \\ \overset{0}{z}_k}}^{\substack{\overset{0}{z}_i \\ \overset{0}{z}_k}} g(s\psi)\, d\psi \qquad (A.3.6a)$$

où

$$s\left[\xi(\psi)\right] = \frac{1 + b\sqrt{\xi}}{1 + b\sqrt{z}} \qquad (A.3.6b)$$

Cette mise en forme du problème permet de voir clairement que l'erreur ne provient pas de *l'importance* de la correction de courbure transverse, mais de la *variation* de cette correction sur le segment x_{i-1}, x_i considéré dans A.3.6a.

Nous n'avons pas pu établir l'expression générale donnant la différence des solutions de (A.3.4.) et (A.3.5.). Notons toutefois que dans l'ensemble de nos conditions expérimentales le coefficient s varie au maximum de 0,95 à 1, cette variation étant sensiblement linéaire. Nous avons dans ces conditions calculé pour des cas particuliers, la différence de ces solutions : l'erreur ne dépasse pas quelques pour cent. Il ne nous a donc pas paru nécessaire d'utiliser un calcul tel que celui qu'entraînerait (A.3.4.):

- L'équation (A.3.5.) donne des valeurs supérieures à celles solutions de (A.3.4.) : cet écart contribue donc à la divergence entre les courbes expérimentales et théoriques.

- Lorsque le coefficient s devient grand, on peut utiliser la méthode du chapitre 5 pour la solution de (A.3.4.). Le calcul exige alors l'intégration numérique des expressions Γ_i^{0k} données par (A.3.6a).

Annexe 4

APPLICATION DE LA METHODE DE ROSNER
A UN ECHELON DE CATALYSE

Intégrons l'équation (5.3.) sur l'épaisseur de la couche limite, on trouve :

$$\frac{d\delta^*}{dx} + \frac{\delta^* d^*}{dx} Ln\ U_e(C_e - C_w) = St \qquad (A.4.1.)$$

où

$$\delta^* = \int_0^\infty \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{C - C_w}{C_e - C_w}\right) dy \qquad (A.4.2.)$$

Dans le cas d'une concentration de paroi constante [2], on exprime le Stanton par :

$$St = \theta\ R_x^{-1/2}\ Sc^{-1} \qquad (A.4.3.)$$

L'intégration de (A.4.1.) donne :

$$\frac{\delta^*}{x} R_x^{1/2} = \frac{2\theta}{Sc} \qquad (A.4.4.)$$

(A.4.1.) peut se réécrire :

$$St = 2\left(\frac{\Theta}{Sc}\right)^2 \frac{x}{\delta^* R_x} \qquad (A.4.5.)$$

Ce résultat a été obtenu en annulant le second terme du membre de droite. Rosner suppose qu'elle reste valable lorsque ce terme n'est plus nul :

$$\frac{d\delta^*}{dx} + \frac{\delta^* d}{dx} Ln\ U_e(C_e - C_w) = 2\left(\frac{\Theta}{Sc}\right)^2 \frac{x}{\delta x} \qquad (A.4.6.)$$

En résolvant cette équation et en reportant la valeur dans (A.4.5.) :

$$St = \frac{2\Theta}{Sc} \frac{x}{R_x} U_e(C_e - C_w) \times \frac{1}{\left[\int_0^x U_e^2 (C_e - C_w)^2 \sqrt{R_x}\, dx\right]^{1/2}} \qquad (A.4.7.)$$

On écrit que la paroi est le siège d'une réaction chimique :

$$St = \frac{k(\rho C_w)^n}{(C_e - C_w)\rho U_e} \qquad (A.4.8.)$$

En combinant (A.4.7.) et (A.4.8.), on introduit la variable z ; on trouve l'équation finale à résoudre :

$$\boxed{m_w^n = (1-m_w)^2 \left[\int_0^{\bar{z}} (1-m)^2\, d\bar{z}\right]^{-1/2}} \qquad (A.4.9.)$$

Nous avons tracé ici les principales étapes du calcul lorsqu'il n'y a pas d'échelon de catalyse. Nous allons maintenant montrer qu'on peut reprendre ce calcul lorsque la catalyse débute à l'abscisse x_0 : dans ce cas (A.4.1.) et (A.4.2.) restent inchangés.

L'influence de l'échelon sur le Stanton fait que (A.4.3.) va s'écrire :

$$St = \Theta\, R_x^{-1/2}\, Sc^{-1}\, g\left(\frac{x_0}{x}\right) \qquad (A.4.10.)$$

Compte tenu du fait que pour $x = x_0$, $\delta^* = 0$, (A.4.1.) nous donne :

$$\delta^* = \theta\, Sc^{-1} \int_{x_0}^{x} g\left(\frac{x_0}{\xi}\right) R_\xi^{-1/2}\, d\xi \qquad (A.4.11.)$$

(A.4.5.) devient :

$$St\ \delta^* = \left(\frac{\theta}{Sc}\right)^2 \frac{\nu}{U_e} M(x, x_0) \qquad (A.4.12.)$$

où

$$M(x, x_0) = \frac{g\left(\frac{x_0}{x}\right)}{\sqrt{x}} \int_{x_0}^{x} g\left(\frac{x_0}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \qquad (A.4.13.)$$

L'équation (A.4.6.) devient donc

$$\frac{d\delta^*}{dx} + \frac{\delta^* d}{dx} Ln\ U_e(C_e - C_w) = \left(\frac{\theta}{Sc}\right)^2 \times \frac{\nu}{U_e} \times \frac{M(x, x_0)}{\delta^*} \qquad (A.4.14.)$$

Définissons :

$$A = \left(\frac{\theta}{Sc}\right)^2 \times \frac{\nu}{U_e} \qquad (A.4.15a)$$

et

$$Y = U_e(C_e - C_w) \qquad (A.4.15b)$$

La solution de (A.4.14.) nous donne :

$$St = \frac{2AM(x, x_0)\ Y}{\left[2 \int_x^x AM(x, x_0)\ Y^2\ dx\right]^{1/2}} \qquad (A.4.16.)$$

En écrivant la condition de cinétique pariétale (A.4.8.) et en introduisant comme précédemment les variables réduites m et $\bar{z}$, on obtient l'équation intégrale :

$$m_w^n = \frac{(1-m_w)^2 \, M(z,z_0)}{\left[2 \int_{z_0}^{z} M(z,z_0)(1-m_w)^2 \, dz\right]^{1/2}} \qquad (A.4.17.)$$

Pour $x_0 = 0$, $g\left(\frac{x}{x}\right) \equiv 1$, $M(x,0) \equiv 2$, on retrouve l'équation (A.4.9.).

Notons que, dans le cas d'un échelon de catalyse, l'hypothèse de conservation de St δ^* est plus logique que celle de la conservation du coefficient de convection.

Bibliographie

LA COUCHE LIMITE. LA CONVECTION FORCEE

[1] BRUN : Introduction à l'étude de la couche limite. Gauthier Villars (1955).

[2] BRUN, MARTINOT-LAGARDE - MATHIEU : Mécanique des fluides, t. 3, Dunod (1970)

[3] SCHLICHTING : Boundary Layer Theory, Mc Graw Hill (1955).

[4] ECKERT, DRAKE : Heat and mass transfer, Mc Graw-Hill (1959)

[5] HINZE : Turbulence, Mc Graw Hill (1959)

[6] BIRD, STEWART, LIGHTFOOT : Transport phenomena, John Wiley and Sons (1960)

[7] LIN : Turbulent flows and heat transfer, Princeton University Press (1959)

[8] SPALDING : Heat and Mass Transfer in boundary layers, Intertext books London (1970)

[9] FAURE : Théorie des couches limites incompressibles. E.D.F., Bulletin de la direction des études et recherches, A n° 1 (1970)

[10] LIGHTHILL : Contribution to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. of Royal Soc. A 202-359 (1950)

[11] HARTNETT, ECKERT, BIRKEBAK, SAMPSON : Simplified procedure for the calculation of heat transfer to surfaces with non uniform temperature. WADC Report 56-373 (Déc. 1956).

[12] RUBESIN : The effect of arbitrary surface temperature variation along a flat plate on the convective heat transfer in an incompressible turbulent boundary layer. NACA-TN-2345 (avril 1951).

[13] SEBAN : Experimental investigation of convective heat transfer on a pipe to air from a plat flate with stepwise discontinuous surface temperature. Thesis, University of California, Berkeley (1951).

[14] SPALDING : A single formula for the law of the wall. J. of applied mechanics (sept. 1961)

[15] SPALDING : Contribution of the theory of heat transfer across a turbulent boundary layer. J. of heat and mass transfer, vol. 7, p. 743-761 (1964)

[16] SOGIN : Remarks on the temperature step functions on a flat plate in forced convection. Trans. ASME (1959).

[17] SOGIN : Laminar transfer from isothermal spanwise strips on a flat plate. Trans. ASME (1959)

[18] SOGIN, GOLDSTEIN : Turbulent transfer from isothermal spanwise strips on a flat plate (1961)

[19] GARDNER, KESTIN : Calculation of the Spalding function on a range of Prandtl number. Int. J. of Heat and Mass Transfer v. 6, p. 289-99, (1963).

[20] SMITH, SHAH : The calculation of wall and fluid temperatures for the incompressible turbulent boundary-layer, with arbitrary distribution of wall heat flux. Int. J. of heat and mass transfer, v. 5, 179-89, (1962).

[21] ISHIGURO : Heat transfer from nonisothermal flat plate across a turbulent boundary layer. Bull of JSME, vol. 10, n° 40, (1967).

[22] ISHIGURO, SHIGETOMI, MAEDA : Turbulent heat transfer from a surface having stepwise discontinuities on the wall temperature. Bull. of JSME, vol. 12, n° 50 (1969).

[23] SCESA, SAUER : An experimental investigation of convective heat transfer to air from a flat plate with a stepwise discontinuous surface temperature. Trans. of ASME (octobre 1952).

[24] MERK : J. Fluid. Mech. vol. 5, 460-480, (1959).

[25] TRINITE : Couche limite avec transfert de chaleur et de masse. Cas d'une discontinuité de température et concentration à la paroi. Thèse de Docteur ès Sc. Physiques (mars 1971).

[26] GIBBINGS, HALL : Criterion for tolerable roughness in a laminar boundary layer. Engng note (1969).

[27] LAGANELLI, AMES, HARTNETT : Transpiration cooling in a laminar boundary layer with solid wall upstream effects. AIAA, vol. 6, n° 2, (fév. 1968).

[28] FORTIER : Transfer problems in turbulent flow. Annales New York Academy of Science.

[29] SPARROW, LIN, LUNDGREN : Flow development in the hydrodynamic entrance region of tubes and ducts. The Physics of fluids, vol. 7, n° 3 (mars 1974).

[30] Proceedings of the second international conference on numerical methods in fluid dynamics. Springer Verlag p. 365, (sept. 1970).

[31] NG, SPALDING : Turbulence model for boundary layer near walls. Phys. of fluids vol. 15, n° 1, (janvier 1972).

[32] VAN DRIEST : On turbulent flow near a wall. J. of aeronaut. Sci. (nov. 1956).

[33] CHE-PEN-CHEN : Etude expérimentale de la couche limite thermique. Turbulence dans l'eau. J. of heat dans mass transfer, vol. 12, p. 61-70, (1969)

[34] CHE-PEN-CHEN : Détermination expérimentale du nombre de Prandtl turbulent près d'une paroi libre. Int. J. of heat and mass transfer, vol. 16, p. 1849-62 (1973).

[35] POOTS, RAGGETT : Theoretical results for variable property, laminar boundary layer in water. Int. J. of heat and mass transfer, vol. 10, p. 597-610, (1967).

[36] POOTS, RAGGETT : Theoretical results for variable property, laminar boundary layer in water with adverse pressure gradients. Int. J. of heat and mass transfer, vol. 11, p. 1513-34, (1968).

[37] LAFAY : Influence de la variation de la viscosité avec la température sur le frottement. Int. J. of heat and mass transfer, vol. 17, p. 815-34, (1974).

COUCHES LIMITES AVEC REACTION CHIMIQUE

[38] CHUNG : Chemically reacting nonequilibrium boundary-layer. Advances in heat transfer, vol. 2, p. 109, Academic press (1965).

[39] FRANK KAMENETSKII : Diffusion and heat exchange in chemical kinetics. Princeton University Press, Princeton (1955).

[40] CHAMBRE, ACRIVOS : On chemical surface reactions in laminar boundary layer flows. J. of Appl. Phys., vol. 27, n° 11, 1322-28, (1956).

[41] CHAMBRE, ACRIVOS : Laminar boundary layers flows with surface reactions. Indust. and engng chem., vol. 49, n° 6, 1025-29 (1957).

[42] CHAMBRE : On chemical surface reactions in hydrodynamic flows. Appl. Sci. Res. section A, vol. 6, 97-113.

[43] LASSAU,LE FUR : Profil des concentrations dans une couche limite laminaire figée avec réaction catalytique à la paroi. Labo. d'Aérothermique, Meudon, Rapport N° 66-3.

[44] LASSAU,LE FUR : Etude théorique d'une couche limite laminaire figée avec plusieurs discontinuités de catalyse. Labo. d'Aérothermique, C.N.R.S., n° 65-10.

[45] LASSAU : Etude d'une couche limite laminaire avec réaction chimique catalysée sur la paroi. Thèse de doctorat ès Sciences, Paris (1967).

[46] VALENTIN : Etude de la convection avec réaction chimique. Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Paris (1960).

[47] ROSNER : The apparent chemical kinetics of surface reactions in external flow systems. AIChE, vol. 9; n° 3, p. 321.

[48] ROSNER : Effects of convective diffusion on the apparent kinetics of zeroth order surface catalyzed chemical reactions. Chem. Engng Sci., vol. 21, p. 223-239, (1966).

[49] ROSNER : Convective diffusion as an intruder in kinetic studies of surface catalyzed reactions. AIAA, vol. 2, n° 4, (avril 1964).

[50] ROSNER : Influence of the turbulent diffusion boundary layer on the apparent kinetics of surface catalyzed reactions in external flow systems. Chem. Engng Sci. vol. 19, p. 1-17 (1964).

[51] ROSNER : Effects of the Stefan-Nusselt flow on the apparent kinetics of heterogenous chemical reactions in forced convection. Int. J. of Heat and Mass transfer, vol. 9, p. 1233-53 (1966).

[52] CHUNG, ANDERSON : Surface recombination in the frozen compressible flow of a dissociated diatomic gaz past a catalytic flat plate. ARS Journal Mass (1960).

[53] KENDALL, ANDERSON : Non similar solution for laminar and turbulent boundary layer flows over ablating surfaces. AIAA, vol. 10, n° 9, (sept. 1972).

[54] GODDARD : Etude analogique de réaction chimique dans la couche limite laminaire. I.F.P. rapport n° 8922.

[55] LEDOUX, LASSALLES : Couche limite de diffusion avec réaction d'ordre un à la paroi. J; de chimie physique, vol. 70, n° 9, (sept. 1973).

[56] LASSALLES : Couche limite de diffusion au voisinage d'une membrane. Thèse doct. de spécialité (22 mars 1972).

[57] LEDOUX, TRINITE : Simulateur thermique d'écoulement avec réaction chimique de paroi, C.R.A.S. 273, p. 837-40, (nov. 71).

[58] LEDOUX, TRINITE : Simulation thermique d'écoulements avec réaction de surface. Revue Générale de thermique, vol. 11, n° 131, (nov. 1972).

[59] MARTY, QUERRY : Influence de l'état hydrodynamique de la solution oxydante et de la rugosité caractéristique du solide sur la vitesse de dissolution. Congrès français de mécanique (sept. 1973).

[60] DEHAIES : Contribution à l'étude de l'ablation liquide-solide en écoulement turbulent. Thèse Doct. Spécialité, Poitiers (avril 1973).

[61] VILLERMAUX : Diffusion dans un réacteur cylindrique. Int. J. of heat and mass transfer, vol. 14, p. 1963-81, (1971).

[62] HOUZELOT : Etude expérimentale et théorique du transfert de matière entre un gaz et une paroi dans des réacteurs ouverts. Thèse de doct. ès Sc. physiques Nancy 1 (janv. 1974).

[63] RONCO, COEURET : Transfert de matière avec réaction chimique. Génie chimique, vol. 100, n° 2, (juillet 1968).

[64] VAN-SHAW, HANNRATTY : Fluctuation in the local rate of turbulent mass transfer to a pipe wall. AIChE vol. 10, n° 4, (1964).

[65] VIETH, PORTER, SHERWOOD : Mass transfer and chemical reaction in a turbulent boundary layer.

[66] LARSON, YERAZUNIS : Mass transfer in turbulent flows. J. of Int. Mass Transfer vol. 16, p. 121-128, (1973).

[67] BARRERE, BORGHI : Taux de production chimique en régime turbulent. Entropie n° 52, (août 1973).

[68] SEBAN, BOND : Skin friction and heat transfer characteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow. J. Aero. Sci. vol. 18, p. 671, (1951).

[69] KELLY : A note on the laminar boundary layer on a circular cylinder in axial incompressible flow. J. Aero. Sci. vol. 21, p. 634, (1954).

[70] GLAUERT, LIGHTHILL : The axisymmetric boundary layer of a long thin cylinder. Roy. Soc. of London proceedings, V. 230, p. 188 (1955).

[71] JAKOB, DOW : Heat transfer from a cylindrical surface to air in parallel flow with and without unheated starting sections. Trans. of ASME (Fev. 1946).

[72] ECKERT : Simplified treatment of the turbulent boundary layer along a cylinder in compressible flow. J. of aero. sci. (janvier 1952).

[73] SPARROW, ECKERT, MINKOWYCZ : Heat transfer and skin friction for turbulent boundary layer flow longitudinal to a circular cylinder. J. of appl. mech. (mars 1963).

[74] RAO : The law of the wall in a thick axisymmetric turbulent boundary layer. J. of appl. mech. (mars 1967).

[75] RAO, KESHAVAN : Axisymmetric turbulent boundary layers in zero pressure gradient flows, J. of Appl. Mech. (mars 1972).

[76] WHITE : An analysis of axisymmetric turbulent flow past a long cylinder. Trans. of ASME (mars 1972).

[77] WHITE, LESSMANN, CHRISTOPH : Analysis of turbulent skin friction in thick axisymmetric boundary layers. AIAA, vol. 11, n° 6 (juin 1973).

[78] CEBECI : Laminar and turbulent incompressible boundary layers on slender bodies of revolution in axial flow. J. of Basic engng. (sept. 1970).

[79] CEBECI : Eddy viscosity distributions in thick oxisymmetric turbulent boundary layers. Trans. of ASME (1973).

[80] YU : Effect of transverse curvature on turbulent boundary layers characteristics. J. Ship research, vol. 2, p. 33, (1958).

[81] RICHMOND : Experimental investigation of thick axially symmetric boundary layers on cylinder at subsonic and hypersonic speeds. Guggenhein aeronautical lab. Calif. Instit. of techn. Hypersonic Research. memo n° 39, (juin 1957).

[82] EICHHORN, ECKERT, ANDERSON : An experimental study of the effects of non uniform wall temperature on heat transfer in laminar and turbulent axisymmetric flow along a cylinder. WADC Report (juillet 1958).

AUTRES SUJETS

[83] Mc DONALD, KRESKOVSKY : Effect of free stream turbulence on the turbulent boundary layer. Int. J. heat and mass transfer, vol. 17, p. 705-16, (juillet 1974).

[84] CHARNAY, COMTE-BELLOT, MATHIEU : Development of a turbulent boundary layer of a flat plate in an external turbulent flow. AGARD "Conference turbulence shear flow", Londres 13-15 (sept. 1971).

[85] RESCH : Principe du fonctionnement et du tarage du fil ou du film chaud. Rapport C.E.A. n° 3510.

[86] *** Low velocity measurements in water using hot film probes. DISA inform n° 1, (1965).

[87] GOUESBET, LEDOUX : Etude de la couche limite laminaire sur un cylindre par anémométrie Doppler-Laser, dans le cas de conditions optiques défavorables. CRAS série B, 315, t. 270, (25 fév. 1974).

[88] LEDOUX, LASSALLES, CALVET : Utilisation d'un thermoconductimètre à impulsions comme anémomètre pour les basses vitesses dans les liquides. C.R.A.S., t. 274, p. 153-156 (17 janv. 1972).

[89] GOUESBET : Réalisation d'un anémomètre Doppler à Laser. Application à l'étude d'écoulements liquides. Thèse Doct. Spécialité, Rouen 1973.

[90] MARTY, QUERRY : La concentration des produits de réaction définit la vitesse d'usinage du fer par le chlorure ferrique. Corrosion, vol. 21, n° 4, (juillet 1973).

[91] SAUBESTRE : Copper etching in ferric chloride. Ind. and engng chem. vol. 51, n° 3 (mars 1959).

[92] WILLBANKS : On similarity of a problem in concentration dependant diffusion and flow in a free boundary layer. Int. J. Engng Sci. vol. 6, p. 531-537.

[93] SHIROTSUKA, SANO : Analogy between non steady heat transfer and mass transfer with chemical reaction in laminar boundary layer.

[94] Journées internationales de la transmission de la chaleur. S.F.T. 19-24 juin 1961, tome II.